

# 辽宁省名校联盟 2025 年高二 3 月份联合考试

## 数学

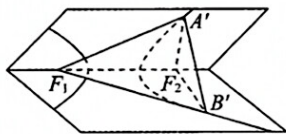
本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

### 注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 若直线  $l_1: ax+y+1=0$  与  $l_2: x+ay-1=0$  平行,则实数  $a=$   
A. 1                      B. -1                      C. 1 或 -1                      D. 0
- 已知  $(ax-1)(1+\sqrt{x})^6$  展开式中各项系数之和为 64,则展开式中  $x^3$  的系数为  
A. 31                      B. 30                      C. 29                      D. 28
- 已知直线  $l$  过点  $A(2,3,1)$ ,且  $\mathbf{a}=(1,1,1)$  为  $l$  的一个方向向量,则点  $P(4,3,2)$  到直线  $l$  的距离为  
A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\sqrt{2}$                       C.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$                       D.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- 已知  $X \sim B(3, p)$  ( $0 < p < 1$ ),  $4P(X=3) + P(X=2) = \frac{7}{8}$ ,且  $Y=2X+1$ ,则下列选项中不正确的是  
A.  $p = \frac{1}{2}$                       B.  $E(X) = \frac{3}{2}$   
C.  $D(X) = \frac{3}{4}$                       D.  $E(Y) - 1 = 2D(Y)$
- 现有 5 个编号为 1,2,3,4,5 的不同的球和 5 个编号为 1,2,3,4,5 的不同的盒子,把球全部放入盒子内,则下列说法正确的是  
A. 共有 120 种不同的放法  
B. 恰有一个盒子不放球,共有 1 200 种放法  
C. 每个盒子内只放一个球,恰有 2 个盒子的编号与球的编号相同,不同的放法有 60 种  
D. 将 5 个不同的球换成相同的球,恰有一个空盒的放法有 5 种
- 已知实数  $x_1, x_2, y_1, y_2$  满足  $x_1^2 + y_1^2 = 4, x_2^2 + y_2^2 = 4, x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ ,则  $\frac{|x_1 + y_1 - 4|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 4|}{\sqrt{2}}$  的最大值为  
A.  $3\sqrt{2}$                       B. 6                      C.  $6\sqrt{2}$                       D. 12
- 设  $A, B, C$  是集合  $\{1, 2, 3, \dots, 2024\}$  的子集,且满足  $A \subseteq C, B \subseteq C$ ,这样的有序组  $(A, B, C)$  的总数是  
A.  $3^{2024}$                       B.  $5^{2024}$                       C.  $3^{1012}$                       D.  $5^{1012}$
- 已知  $F_1, F_2$  分别是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的左、右焦点,过点  $F_2$  作直线  $AB \perp F_1F_2$  交  $C$  于  $A, B$  两点. 现将  $C$  所在平面沿直线  $F_1F_2$  折成平面角为锐角  $\alpha$  的二面角,如图,翻折后  $A, B$  两点的对应点分别为  $A', B'$ ,且  $\angle A'F_1B' = \beta$ . 若  $\frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos \beta} = \frac{25}{16}$ ,则  $C$  的离心率为



A.  $\sqrt{3}$

B.  $2\sqrt{2}$

C. 3

D.  $3\sqrt{2}$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分。

9. 下列说法中正确的是

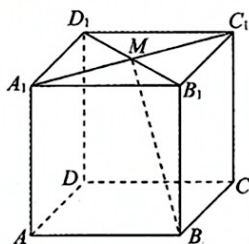
A. 回归直线  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  恒过点  $(\bar{x}, \bar{y})$

B. 两个变量线性相关性越强，则相关系数  $r$  就越接近 1

C. 在线性回归方程  $\hat{y} = 2 - 0.5x$  中，当变量  $x$  每增加一个单位时， $\hat{y}$  平均减少 0.5 个单位

D. 以模型  $y = ce^{kx}$  去拟合一组数据时，为了求出回归方程，设  $z = \ln y$ ，求得线性回归方程为  $z = 0.3x + 4$ ，则  $c, k$  的值分别是  $e^4$  和 0.3

10. 如图，在直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB = AD = AA_1 = 2$ ， $\angle BAD = \frac{\pi}{3}$ ， $M$  为  $A_1C_1$  与  $B_1D_1$  的交点。若  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ ， $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{c}$ ，则下列说法正确的有



A.  $\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$

B.  $AC_1 = 2\sqrt{6}$

C. 设  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BB_1}$ ，则  $AN \perp BM$

D. 以  $D$  为球心， $\sqrt{7}$  为半径的球与四边形  $BCC_1B_1$  的交线长为  $\frac{2}{3}\pi$

11. 法国数学家加斯帕尔·蒙日被称为“画法几何创始人”“微分几何之父”，他发现与椭圆相切的两条互相垂直的切线的交点的轨迹是以该椭圆中心为圆心的圆，这个圆称为该椭圆的蒙日圆。若椭圆  $\Gamma: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  的蒙日圆为圆  $C$ ，过  $C$  上的动点  $M$  作  $\Gamma$  的两条互相垂直的切线，分别与  $\Gamma$  交于  $P, Q$  两点，直线  $PQ$  交  $\Gamma$  于  $A, B$  两点，则下列说法正确的是

A. 椭圆  $\Gamma$  的蒙日圆方程为  $x^2 + y^2 = 7$

B.  $\triangle MPQ$  面积的最大值为 7

C.  $|AB|$  的最小值为  $2\sqrt{3}$

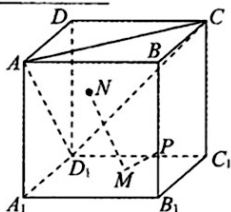
D. 若动点  $D$  在  $\Gamma$  上，将直线  $DA, DB$  的斜率分别记为  $k_1, k_2$ ，则  $k_1 k_2 = \frac{3}{4}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分。

12. 随机变量  $X$  服从正态分布  $N(8, \sigma^2)$ ， $P(x > 10) = m$ ， $P(6 \leq x \leq 8) = n$ ，则  $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$  的最小值为 \_\_\_\_\_。

13. 甲、乙两人进行乒乓球比赛，每局比赛 11 分制，若比分打到 10 : 10 时，需要一人比另一人多得两分，比赛才能结束。已知甲赢得每一分的概率为  $\frac{3}{4}$ ，在两人的第一局比赛中，两人达到了 10 : 10，此局比赛结束时，两人的得分总和为 24 的概率为 \_\_\_\_\_。

14. 在棱长为 4 的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $M, N$  分别是平面  $A_1B_1C_1D_1$  和平面  $ACD_1$  内的动点,  $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PB_1}$ , 则  $PM+MN$  的最小值为 \_\_\_\_\_.



四、解答题: 本题共 5 小题, 共 77 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15. (13 分)

民航招飞是指普通高校飞行技术专业(本科)通过高考招收飞行学生, 报名的学生需参与预选初检、体检鉴定、飞行职业心理学检测、背景调查、高考选拔共 5 项流程, 其中前 4 项流程选拔均通过, 则被确认为有效招飞申请, 然后参加高考, 由招飞院校择优录取。据统计, 某校高三在校学生有 1 000 人, 其中男生 600 人, 女生 400 人, 各有 100 名学生有民航招飞意向。

- (1) 完成以下  $2 \times 2$  列联表, 并回答是否有 99.9% 的把握认为该校高三学生有民航招飞意向与学生性别有关?

	对民航招飞有意向	对民航招飞没有意向	合计
男生			
女生			
合计			

- (2) 若每名报名学生通过前 4 项流程的概率依次约为  $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1$ , 假设学生能否通过这 4 项流程相互独立, 估计该校高三学生被认为有效招飞的人数。

附:  $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d.$

$\alpha = P(\chi^2 \geq k)$	0.050	0.010	0.001
$k$	3.841	6.635	10.828

16. (15 分)

某工厂生产一批机器零件, 现随机抽取 100 件对某一项性能指标进行检测, 得到一组数据  $X$ , 如下表:

性能指标 $X$	66	77	80	88	96
产品件数	10	20	48	19	3

- (1) 求该项性能指标的样本平均数  $\bar{x}$  的值, 若这批零件的该项指标  $X$  近似服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 其中  $\mu$  近似为样本平均数  $\bar{x}$  的值,  $\sigma^2 = 36$ , 试求  $P(74 \leq X \leq 92)$  的值;  
 (2) 若此工厂有甲、乙两台机床加工这种机器零件, 且甲机床的生产效率是乙机床的生产效率的 2 倍, 甲机床生产的零件的次品率为 0.02, 乙机床生产的零件的次品率为 0.01, 现从这批零件中随机抽取一件。

(i) 求这件零件是次品的概率;

(ii) 若检测出这件零件是次品, 求这件零件是甲机床生产的概率。

参考数据: 若随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma \leq \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.683, P(\mu - 2\sigma \leq \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.954, P(\mu - 3\sigma \leq \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.997.$

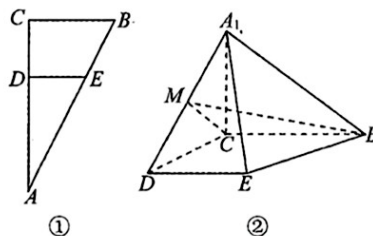
17. (15分)

如图①,在  $Rt\triangle ABC$  中,  $C=90^\circ$ ,  $BC=3$ ,  $AC=6$ ,  $D, E$  分别是  $AC, AB$  上的点, 满足  $DE \parallel BC$  且  $AE=2BE$ , 将  $\triangle ADE$  沿  $DE$  折起到  $\triangle A_1DE$  的位置(如图②), 使  $A_1C \perp CD$ ,  $M$  是  $A_1D$  的中点.

(1) 求证:  $A_1C \perp$  平面  $BCDE$ ;

(2) 求  $CM$  与平面  $A_1BE$  所成角的大小;

(3) 在线段  $A_1C$  上是否存在点  $N$ , 使平面  $BCM$  与平面  $BMN$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ? 若存在, 求出  $CN$  的长度; 若不存在, 请说明理由.



18. (17分)

强基计划于 2020 年在有关高校开始实施, 主要选拔有志于服务国家重大战略需求且综合素质优秀或基础学科拔尖的学生. 为选拔培养对象, 某高校在暑假期间从中学里挑选优秀学生参加数学、物理、化学学科夏令营活动.

(1) 若数学组的 7 名学员中恰有 4 人来自 A 中学, 从这 7 名学员中随机选取 4 人,  $\xi$  表示选取的人中来自 A 中学的人数, 求  $\xi$  的分布列和数学期望;

(2) 在夏令营开幕式的晚会上, 物理组举行了一次学科知识竞答活动, 规则如下: 两人一组, 每一轮竞答中, 每人分别答两题, 若小组答对题数不小于 3, 则取得本轮胜利. 已知甲、乙两名同学组成一组, 甲、乙答对每道题的概率分别为  $p_1, p_2$ . 假设甲、乙两人每次答题相互独立, 且互不影响. 当  $p_1 + p_2 = \frac{6}{5}$  时, 求甲、乙两名同学在每轮答题中取胜的概率的最大值.

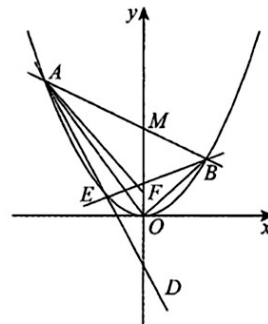
19. (17分)

设抛物线  $C: x^2 = 2py (p > 0)$ , 过点  $M(0, 4)$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点, 且  $OA \perp OB$ . 若抛物线  $C$  的焦点为  $F$ , 记  $\triangle AOB, \triangle AOF$  的面积分别为  $S_{\triangle AOB}, S_{\triangle AOF}$ .

(1) 求  $S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle AOF}$  的最小值;

(2) 设点  $D(1, -4)$ , 直线  $AD$  与抛物线  $C$  的另一交点为  $E$ , 求证: 直线  $BE$  过定点;

(3) 我国古代南北朝数学家祖暅所提出的祖暅原理是“幂势既同, 则积不容异”, 即夹在两个平行平面间的两个几何体被平行于这两个平面的任意平面所截, 如果截得的两个截面的面积总相等, 那么这两个几何体的体积相等. 当  $\triangle AOB$  为等腰直角三角形时, 记线段  $AB$  与抛物线围成的封闭图形为  $\omega$ ,  $\omega$  绕  $y$  轴旋转半周形成的曲面所围成的几何体为  $\Omega$ . 试用祖暅原理的数学思想求出  $\Omega$  的体积.



# 参考答案及解析

## 一、选择题

1. A 【解析】因为直线  $l_1: ax + y + 1 = 0$  与  $l_2: x + ay - 1 = 0$  平行, 所以  $a^2 - 1 = 0$  且  $-a - 1 \neq 0$ , 解得  $a = 1$ . 故选 A 项.

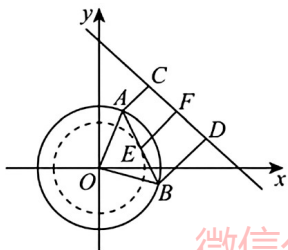
2. C 【解析】在  $(ax - 1)(1 + \sqrt{x})^6$  中, 令  $x = 1$  得  $(a - 1)(1 + \sqrt{1})^6 = 64$ , 解得  $a = 2$ ,  $(1 + \sqrt{x})^6$  展开式的通项公式为  $T_{r+1} = C_6^r x^{\frac{1}{2}r}$ ,  $0 \leq r \leq 6, r \in \mathbf{N}$ , 当  $r = 4$  时,  $T_5 = C_6^4 x^2 = 15x^2$ , 当  $r = 6$  时,  $T_7 = x^3$ , 故展开式中  $x^3$  的系数为  $15 \times 2 - 1 = 29$ . 故选 C 项.

3. B 【解析】由已知可得  $\vec{AP} = (2, 0, 1)$ , 又  $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$ , 所以向量  $\vec{AP}$  在向量  $\mathbf{a}$  上的投影向量的模为  $\frac{|\vec{AP} \cdot \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ , 又  $|\vec{AP}| = \sqrt{5}$ , 所以点  $P(4, 3, 2)$  到直线  $l$  的距离为  $\sqrt{5 - 3} = \sqrt{2}$ . 故选 B 项.

4. D 【解析】由题意得  $4C_3^3 p^3 + C_3^2 p^2(1-p) = p^3 + 3p^2 = \frac{7}{8}$ . 因为函数  $f(p) = p^3 + 3p^2$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 且  $f(\frac{1}{2}) = \frac{7}{8}$ , 所以  $p = \frac{1}{2}$ . 因为  $E(X) = np = \frac{3}{2}, D(X) = np(1-p) = \frac{3}{4}$ , 所以  $E(Y) - 1 = 2E(X) = 3, D(Y) = 2^2 D(X) = 3$ , 则  $E(Y) - 1 = D(Y)$ . 故选 D 项.

5. B 【解析】对于 A 项, 每个球都有 5 种放法, 共有  $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$  种放法, 故 A 项错误; 对于 B 项, 把球全部放入盒子内, 恰有一个盒子不放球, 有  $C_5^3 A_4^3 = 1200$  种不同的放法, 故 B 项正确; 对于 C 项, 每个盒子内只放一个球, 恰有 2 个盒子的编号与球的编号相同, 其余的球的编号与盒子的号不一致, 则不同的放法有  $C_5^2 \times 2 = 20$  种不同的放法, 故 C 项错误; 对于 D 项, 将 5 个不同的球换成相同的球, 恰有一个空盒, 即有 4 个盒子里放了球, 且共放 5 个相同的球, 则不同的放法有  $C_5^3 C_4^1 = 20$  种, 故 D 项错误. 故选 B 项.

6. C 【解析】设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1^2 + y_1^2 = 4, x_2^2 + y_2^2 = 4, x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, O$  为坐标原点, 故  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  在圆  $x^2 + y^2 = 4$  上, 且  $AO \perp BO$ ,



$\frac{|x_1 + y_1 - 4|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 4|}{\sqrt{2}}$  表示  $A, B$  到直线  $x + y - 4 = 0$  的距离之和, 原点  $O$  到直线  $x + y - 4 = 0$  的距离  $d = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ , 如图, 作  $AC \perp CD, BD \perp CD, E$  是  $AB$  的中点,  $EF \perp CD$  于点  $F, |AC| + |BD| = 2|EF|, |OE| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}$ , 故  $E$  在圆  $x^2 + y^2 = 2$  上, 所以  $|EF|_{\max} = \sqrt{2} + d = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ , 故  $\frac{|x_1 + y_1 - 4|}{\sqrt{2}} + \frac{|x_2 + y_2 - 4|}{\sqrt{2}}$  的最大值为  $2|EF|_{\max} = 6\sqrt{2}$ . 故选 C 项.

7. B 【解析】当集合  $C$  中有 2 024 个元素时, 不同的有序集合组  $(A, B, C)$  有  $C_{2024}^2 \cdot 2^{2024} \cdot 2^{2024}$  个, 当集合  $C$  中有 2 023 个元素时, 不同的有序集合组  $(A, B, C)$  有  $C_{2023}^2 \cdot 2^{2023} \cdot 2^{2023}$  个, ..., 当集合  $C$  中有 0 个元素时, 不同的有序集合组  $(A, B, C)$  有  $C_{2024}^0 \cdot 2^0 \cdot 2^0$  个, 所以总数为  $C_{2024}^2 \cdot 2^{2024} \cdot 2^{2024} + C_{2023}^2 \cdot 2^{2023} \cdot 2^{2023} + \dots + C_{2024}^0 \cdot 2^0 \cdot 2^0 = C_{2024}^2 \cdot 4^{2024} + C_{2023}^2 \cdot 4^{2023} + \dots + C_{2024}^0 \cdot 1 = (1+4)^{2024} = 5^{2024}$ . 故选 B 项.

8. C 【解析】设双曲线的半焦距为  $c(c > 0)$ , 由题意可得  $|AF_2| = |BF_2| = \frac{b^2}{a}, |AF_1| = |BF_1| = 2a + \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 + c^2}{a}$ , 则  $|A'F_2| = |B'F_2| = \frac{b^2}{a}, |A'F_1| = |B'F_1| = \frac{a^2 + c^2}{a}$ , 且平面  $A'F_1F_2 \cap$  平面  $B'F_1F_2 = F_1F_2, A'F_2 \perp F_1F_2, B'F_2 \perp F_1F_2$ , 则锐二面角  $\alpha = \angle A'F_2B'$ , 在  $\triangle A'F_2B'$  中, 由余弦定理可得  $1 - \cos \alpha = 1 - \frac{|A'F_2|^2 + |B'F_2|^2 - |A'B'|^2}{2|A'F_2| \cdot |B'F_2|} = 1 - \frac{(\frac{b^2}{a})^2 + (\frac{b^2}{a})^2 - |A'B'|^2}{2 \times \frac{b^2}{a} \times \frac{b^2}{a}} = \frac{a^2 |A'B'|^2}{2b^4}$ , 在  $\triangle A'F_1B'$  中, 由余弦定理可得  $1 - \cos \beta = 1 - \frac{|A'F_1|^2 + |B'F_1|^2 - |A'B'|^2}{2|A'F_1| \cdot |B'F_1|} = 1 - \frac{(\frac{a^2 + c^2}{a})^2 + (\frac{a^2 + c^2}{a})^2 - |A'B'|^2}{2 \times \frac{a^2 + c^2}{a} \times \frac{a^2 + c^2}{a}} = \frac{a^2 |A'B'|^2}{2(a^2 + c^2)^2}$ , 因为

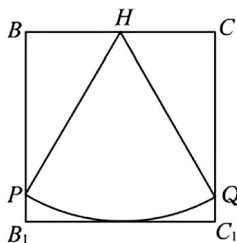
$$\frac{1-\cos \alpha}{1-\cos \beta} = \frac{25}{16}, \text{ 即 } \frac{\frac{a^2 |A'B'|^2}{2b^4}}{\frac{a^2 |A'B'|^2}{2(a^2+c^2)^2}} = \frac{(a^2+c^2)^2}{b^4} = \frac{25}{16}, \text{ 可得}$$

$$\frac{a^2+c^2}{b^2} = \frac{a^2+c^2}{c^2-a^2} = \frac{5}{4}, \text{ 解得 } e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = 3. \text{ 故选 C 项.}$$

二、选择题

9. ACD 【解析】对于 A 项, 回归直线  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$  恒过点  $(\bar{x}, \bar{y})$ , A 项正确; 对于 B 项, 两个变量线性相关性越强, 则相关系数  $|r|$  就越接近 1, B 项错误; 对于 C 项, 根据回归系数的含义, 线性回归方程  $\hat{y} = 2 - 0.5x$  中, 当变量  $x$  每增加一个单位时,  $\hat{y}$  平均减少 0.5 个单位, C 项正确; 对于 D 项, 由  $y = ce^{kx}$  两边取对数, 可得  $\ln y = \ln c + kx$ , 令  $z = \ln y$ , 求得线性回归方程为  $z = 0.3x + 4$ , 所以  $k = 0.3, \ln c = 4$ , 则  $k = 0.3, c = e^4$ , D 项正确. 故选 ACD 项.

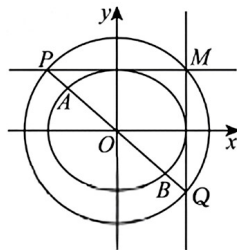
10. ACD 【解析】由题得  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}$ , 故 A 项正确. 因为  $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{3} = 2, \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$ , 所以  $|\overrightarrow{AC_1}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$ , 所以  $AC_1 = 4$ , 故 B 项错误. 因为  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BB_1} = \mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{c}$ , 所以  $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BM} = (\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{c}) \cdot (-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{c}) = -\frac{1}{2}\mathbf{a}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \frac{1}{8}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \frac{1}{8}\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \frac{1}{4}\mathbf{c}^2 = 0$ , 所以  $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{BM}$ , 所以  $AN \perp BM$ , 故 C 项正确. 取  $BC$  的中点为  $H$ , 连接  $DH$ , 易知  $DH \perp$  平面  $BCC_1B_1$ , 且  $DH = \sqrt{3}$ . 由球的半径为  $\sqrt{7}$ , 知球面与平面  $BCC_1B_1$  的交线是以  $H$  为圆心,  $\sqrt{7-3} = 2$  为半径的圆, 如图, 在正方形  $BCC_1B_1$  内, 以  $H$  为圆心, 2 为半径作圆,



所得的圆弧  $PQ$  即为所求交线. 由题意可知  $\angle PHQ = \frac{\pi}{3}$ , 所以弧  $PQ$  的长为  $\frac{2}{3}\pi$ , 故 D 项正确. 故选 ACD 项.

11. ABC 【解析】依题意, 可设圆  $C$  的方程为  $x^2 + y^2 = r^2$ , 过椭圆  $\Gamma$  的上顶点  $(0, \sqrt{3})$  作  $y$  轴的垂线, 过椭圆  $\Gamma$

的右顶点  $(2, 0)$  作  $x$  轴的垂线, 则这两条垂线的交点  $(2, \sqrt{3})$  在圆  $C$  上, 所以  $2^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2$ , 即  $r^2 = 7$ , 所以椭圆  $\Gamma$  的蒙日圆方程为  $x^2 + y^2 = 7$ , 故 A 项正确; 因为点  $M, P, Q$  都在圆  $C$  上, 且  $\angle PMQ = 90^\circ$ , 所以  $PQ$  为圆  $C$  的直径, 所以  $\triangle MPQ$  面积的最大值为  $\frac{1}{2} \times |PQ| \times \sqrt{7} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$ , 故 B 项正确; 由于  $PQ$  为圆  $C$  的直径且过坐标原点, 即  $AB$  过坐标原点, 所以  $|AB|_{\min} = 2b = 2\sqrt{3}$ , 故 C 项正确; 由直线  $PQ$  经过坐标原点, 易得点  $A, B$  关于原点对称, 设  $A(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ , 则  $B(-x_1, -y_1), k_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, k_2 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$ , 又  $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1, \end{cases}$  所以  $\frac{x_1^2 - x_2^2}{4} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{3} = 0$ , 所以  $k_1 k_2 = \frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = -\frac{3}{4}$ , 故 D 项错误. 故选 ABC 项.

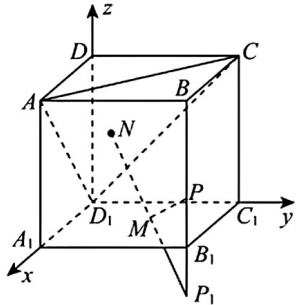


三、填空题

12.  $6 + 4\sqrt{2}$  【解析】因为随机变量  $X$  服从正态分布  $N(8, \sigma^2)$ , 所以  $P(X \geq 8) = \frac{1}{2}$ , 由  $P(x > 10) = m, P(6 \leq x \leq 8) = P(8 \leq x \leq 10) = n$ , 所以  $m + n = \frac{1}{2}$ , 且  $m > 0, n > 0$ , 则  $\frac{2}{m} + \frac{1}{n} = 2\left(\frac{2}{m} + \frac{1}{n}\right)(m+n) = 2\left(3 + \frac{2n}{m} + \frac{m}{n}\right) \geq 2\left(3 + 2\sqrt{\frac{2n}{m} \cdot \frac{m}{n}}\right) = 6 + 4\sqrt{2}$ , 当且仅当  $\frac{2n}{m} = \frac{m}{n}$ , 即  $m = \frac{2-\sqrt{2}}{2}, n = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$  时等号成立, 所以  $\frac{2}{m} + \frac{1}{n}$  的最小值为  $6 + 4\sqrt{2}$ .

13.  $\frac{15}{64}$  【解析】因为比赛结束时, 两人的得分总和为 24, 所以两人的得分的差的绝对值为 2, 若甲赢得比赛, 则最后两局比赛甲胜, 第 21 球和第 22 球甲、乙一胜一负, 所以甲赢得比赛的概率为  $\left(2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{128}$ , 同理乙赢得比赛的概率为  $\left(2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{128}$ , 所以所求概率  $P = \frac{30}{128} = \frac{15}{64}$ .

14.  $3\sqrt{3}$  【解析】取点  $P$  关于平面  $A_1B_1C_1D_1$  的对称点为  $P_1$ , 设点  $P_1$  到平面  $ACD_1$  的距离为  $d$ , 则  $PM = P_1M$ , 所以  $PM + MN = P_1M + MN \geq d$ , 以  $D_1$  为坐标原点,  $D_1A_1, D_1C_1, D_1D$  所在直线分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



因为正方体的棱长为 4, 且  $\overrightarrow{BP} = 3\overrightarrow{PB_1}$ , 所以  $P_1(4, 4, -1), A(4, 0, 4), C(0, 4, 4), D_1(0, 0, 0), \overrightarrow{D_1P_1} = (4, 4, -1), \overrightarrow{D_1A} = (4, 0, 4), \overrightarrow{D_1C} = (0, 4, 4)$ , 设平面  $ACD_1$  的法向量为  $m = (x, y, z)$ , 则  $\begin{cases} \overrightarrow{D_1A} \cdot m = 4x + 4z = 0, \\ \overrightarrow{D_1C} \cdot m = 4y + 4z = 0, \end{cases}$  取  $x = 1$ , 则  $y = 1, z = -1$ , 则  $m = (1, 1, -1)$ , 所以点  $P_1$  到平面  $ACD_1$  的距离  $d = \frac{|\overrightarrow{D_1P_1} \cdot m|}{|m|} = \frac{|4 + 4 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ , 即  $PM + MN$  的最小值为  $3\sqrt{3}$ .

四、解答题

15. 解: (1) 列联表如下:

	对民航招飞有意向	对民航招飞没有意向	合计
男生	100	500	600
女生	100	300	400
合计	200	800	1 000

(4 分)

由题意查表可知, 因为  $\chi^2 = \frac{1\ 000 \times (100 \times 300 - 100 \times 500)^2}{200 \times 800 \times 600 \times 400} = \frac{125}{12} \approx 10.417 <$

$10.828$ , (6 分)

所以没有 99.9% 的把握认为该校高三学生有民航招飞意向与学生性别有关. (8 分)

(其中卡方结果 2 分, 判断是否有 99.9% 的把握认为有关 2 分)

(2) 因为每名报名学生通过前 4 项流程的概率依次为  $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1$ , 且能否通过相互独立,

所以估计每名报名学生被确认为有效招飞申请的概率  $P = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$ , (10 分)

因为该校有 200 名学生有民航招飞意向, 所以有效招

飞的人数  $X \sim B(200, \frac{1}{4})$ , 所以估计有  $200 \times \frac{1}{4} = 50$  人被确认为有效招飞申请. (13 分)

16. 解: (1)  $\bar{x} = 66 \times 0.1 + 77 \times 0.2 + 80 \times 0.48 + 88 \times 0.19 + 96 \times 0.03 = 80$ , (2 分)

所以  $X \sim N(80, 36), \sigma = 6$ , (3 分)

则  $P(74 \leq X \leq 92) = \frac{1}{2}P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) + \frac{1}{2}P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx \frac{0.954 + 0.683}{2} = 0.8185$ . (6 分)

(2) (i) 记“抽取的零件为甲机床生产”为事件  $A_1$ , “抽取的零件为乙机床生产”为事件  $A_2$ , “抽取的零件为次品”为事件  $B$ , (7 分)

则  $P(A_1) = \frac{2}{3}, P(A_2) = \frac{1}{3}, P(B|A_1) = 0.02, P(B|A_2) = 0.01$ , (9 分)

则  $P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{2}{3} \times 0.02 + \frac{1}{3} \times 0.01 = \frac{0.05}{3} = \frac{1}{60}$ . (12 分)

(ii)  $P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0.02}{\frac{1}{60}} = \frac{4}{5}$ . (15 分)

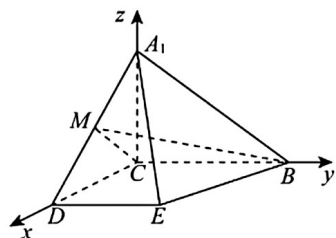
17. (1) 证明: 因为在  $Rt\triangle ABC$  中,  $C = 90^\circ, DE \parallel BC$  且  $BC \perp CD$ ,

所以  $DE \perp CD, DE \perp AD$ , 所以折叠后,  $DE \perp A_1D, DE \perp CD$ , (1 分)

又  $A_1D \cap CD = D, A_1D, CD \subset$  平面  $A_1CD$ , 所以  $DE \perp$  平面  $A_1CD$ , (2 分)

因为  $A_1C \subset$  平面  $A_1CD$ , 所以  $DE \perp A_1C$ , 又因为  $A_1C \perp CD, CD \cap DE = D, CD, DE \subset$  平面  $BCDE$ , 所以  $A_1C \perp$  平面  $BCDE$ . (3 分)

(2) 解: 由 (1) 可知,  $A_1C \perp$  平面  $BCDE, BC \perp CD$ , 以点  $C$  为坐标原点,  $CD, CB, CA_1$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



翻折前, 在  $\triangle ABC$  中,  $DE \parallel BC$ , 则  $\frac{AD}{CD} = \frac{AE}{BE} = 2$ ,

则  $AD = 2CD$ .

则  $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}$ ,

则  $DE = \frac{2}{3}BC = 2, CD = \frac{1}{3}AC = 2$ , (4分)

翻折后, 因为  $A_1C \perp$  平面  $BCDE, CD \subset$  平面  $BCDE$ , 所以  $A_1C \perp CD$ ,

所以  $A_1D = 4, CD = 2$ , 则  $A_1C = \sqrt{A_1D^2 - CD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ , (5分)

故  $C(0, 0, 0), D(2, 0, 0), E(2, 2, 0), B(0, 3, 0), A_1(0, 0, 2\sqrt{3}), M(1, 0, \sqrt{3})$ ,

$\vec{CM} = (1, 0, \sqrt{3}), \vec{A_1B} = (0, 3, -2\sqrt{3}), \vec{A_1E} = (2, 2, -2\sqrt{3})$ . (6分)

设平面  $A_1BE$  的法向量为  $n = (x, y, z)$ ,

则  $\begin{cases} n \cdot \vec{A_1B} = 3y - 2\sqrt{3}z = 0, \\ n \cdot \vec{A_1E} = 2x + 2y - 2\sqrt{3}z = 0, \end{cases}$

不妨令  $y = 2$ , 则  $z = \sqrt{3}, x = 1$ , 则  $n = (1, 2, \sqrt{3})$ . (7分)

设直线  $CM$  与平面  $A_1BE$  所成角为  $\theta$ ,

则  $\sin \theta = |\cos \langle \vec{CM}, n \rangle| = \frac{|\vec{CM} \cdot n|}{|\vec{CM}| \cdot |n|} = \frac{4}{2 \times 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

则  $\theta = 45^\circ$ ,

故直线  $CM$  与平面  $A_1BE$  所成角的大小为  $45^\circ$ . (8分)

(3)解: 假设在线段  $A_1C$  上存在点  $N$ , 使平面  $BCM$  与平面  $BMN$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

在空间直角坐标系中,  $\vec{BM} = (1, -3, \sqrt{3}), \vec{CM} = (1, 0, \sqrt{3}), \vec{CA_1} = (0, 0, 2\sqrt{3})$ ,

设  $\vec{CN} = \lambda \vec{CA_1} = \lambda(0, 0, 2\sqrt{3}) = (0, 0, 2\sqrt{3}\lambda) (0 \leq \lambda \leq 1)$ , 则  $\vec{BN} = \vec{BC} + \vec{CN} = (0, -3, 0) + (0, 0, 2\sqrt{3}\lambda) = (0, -3, 2\sqrt{3}\lambda)$ . (9分)

设平面  $BMN$  的法向量为  $n_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ,

则  $\begin{cases} n_2 \cdot \vec{BM} = x_2 - 3y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \\ n_2 \cdot \vec{BN} = -3y_2 + 2\sqrt{3}\lambda z_2 = 0, \end{cases}$

不妨令  $z_2 = \sqrt{3}$ , 则  $y_2 = 2\lambda, x_2 = 6\lambda - 3$ ,

所以  $n_2 = (6\lambda - 3, 2\lambda, \sqrt{3})$ . (11分)

设平面  $BCM$  的法向量为  $n_3 = (x_3, y_3, z_3)$ ,

则  $\begin{cases} n_3 \cdot \vec{BM} = x_3 - 3y_3 + \sqrt{3}z_3 = 0, \\ n_3 \cdot \vec{CM} = x_3 + \sqrt{3}z_3 = 0, \end{cases}$

不妨令  $z_3 = \sqrt{3}$ , 则  $x_3 = -3, y_3 = 0$ ,

所以  $n_3 = (-3, 0, \sqrt{3})$ . (13分)

若平面  $BCM$  与平面  $BMN$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ,

则满足  $|\cos \langle n_2, n_3 \rangle| = \frac{|n_2 \cdot n_3|}{|n_2| \cdot |n_3|} = \frac{|12 - 18\lambda|}{2\sqrt{3} \times \sqrt{9(2\lambda - 1)^2 + 4\lambda^2 + 3}} = \frac{6|2 - 3\lambda|}{4\sqrt{3} \cdot \sqrt{10\lambda^2 - 9\lambda + 3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ,

化简得  $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$ ,

解得  $\lambda = 1$  或  $\lambda = \frac{1}{2}$ , (14分)

即  $\vec{CN} = \vec{CA_1}$  或  $\vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{CA_1}$ ,

则  $|\vec{CN}| = |\vec{CA_1}| = 2\sqrt{3}$  或  $|\vec{CN}| = \frac{1}{2}|\vec{CA_1}| = \sqrt{3}$ ,

故在线段  $A_1C$  上存在这样的点  $N$ , 使平面  $BCM$  与平面  $BMN$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ,

此时  $CN$  的长度为  $\sqrt{3}$  或  $2\sqrt{3}$ . (15分)

18. 解: (1)  $\xi$  的所有可能取值是 1, 2, 3, 4, (1分)

$P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_3^3}{C_7^4} = \frac{4}{35}, P(\xi = 2) = \frac{C_4^2 C_3^2}{C_7^4} = \frac{18}{35}$ ,

$P(\xi = 3) = \frac{C_4^3 C_3^1}{C_7^4} = \frac{12}{35}, P(\xi = 4) = \frac{C_4^4 C_3^0}{C_7^4} = \frac{1}{35}$ , (5分)

所以  $\xi$  的分布列是

$\xi$	1	2	3	4
$P$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

(7分)

$E(\xi) = 1 \times \frac{4}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{12}{35} + 4 \times \frac{1}{35} = \frac{16}{7}$ . (9分)

(2) 设甲、乙两名同学在每轮答题中取胜为事件  $A$ ,

则  $P(A) = p_1^2 p_2^2 + 2p_1(1-p_1)p_2^2 + 2p_1^2 p_2(1-p_2) = p_1 p_2 [p_1 p_2 + 2(1-p_1)p_2 + 2p_1(1-p_2)] = p_1 p_2 (2p_1 + 2p_2 - 3p_1 p_2)$ , (11分)

由  $p_1 + p_2 = \frac{6}{5}$ , 得  $P(A) = p_1 p_2 \left( \frac{12}{5} - 3p_1 p_2 \right)$ . (12分)

令  $x = p_1 p_2 = p_1 \left( \frac{6}{5} - p_1 \right) = -\left( p_1 - \frac{3}{5} \right)^2 + \frac{9}{25}$ ,

因为  $0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1$  且  $p_1 + p_2 = \frac{6}{5}$ ,

所以  $\frac{1}{5} \leq p_1 \leq 1$ ,

所以  $x \in \left[ \frac{1}{5}, \frac{9}{25} \right]$ , (14分)

设  $f(x) = x \left( \frac{12}{5} - 3x \right)$ ,

则  $f(x) = -3x^2 + \frac{12}{5}x = -3 \left( x - \frac{2}{5} \right)^2 + \frac{12}{25}$ , (15分)

因为  $\frac{9}{25} < \frac{2}{5}$ ,

所以当  $x = \frac{9}{25}$  时,  $f(x)$  取得最大值为  $\frac{297}{625}$ , (16分)

所以当  $p_1 = \frac{3}{5}$  时, 甲、乙两名同学在每轮答题中取胜

的概率的最大值为  $\frac{297}{625}$ . (17分)

19. (1) 解: 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 过  $M$  的直线  $AB$  的方程为  $y = kx + 4$ , (1分)

联立  $\begin{cases} y = kx + 4, \\ x^2 = 2py, \end{cases}$  消去  $y$  整理可得  $x^2 - 2pkx - 8p = 0$ , (2分)

$x_1 x_2 = -8p, y_1 y_2 = \frac{x_1^2}{2p} \cdot \frac{x_2^2}{2p} = 16$ , (3分)

因为  $OA \perp OB$ ,

所以  $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ , 即  $16 - 8p = 0$ , 解得  $p = 2$ ,

即  $x_1 x_2 = -8p = -16$ , (4分)

所以  $S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle AOF} = \frac{1}{2} \times |OM| \times |x_1 - x_2| + 2 \times \frac{1}{2}$

$\times |OF| \times |x_1| = 3|x_1| + 2|x_2| = 3|x_1| + \frac{32}{|x_1|} \geq$

$2\sqrt{3 \times 32} = 8\sqrt{6}$ ,

当且仅当  $x_1^2 = \frac{32}{3}$  时等号成立,

故  $S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle AOF}$  的最小值为  $8\sqrt{6}$ . (6分)

(2) 证明: 设  $E(x_3, y_3)$ , 则直线  $AE$  的斜率  $k_{AE} = \frac{y_1 + 4}{x_1 - 1}$ , 方程为  $y + 4 = \frac{y_1 + 4}{x_1 - 1}(x - 1)$ , (7分)

由(1)知抛物线  $C$  的方程为  $x^2 = 4y$ ,

联立  $\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y + 4 = \frac{y_1 + 4}{x_1 - 1}(x - 1), \end{cases}$  消去  $y$  得  $\frac{x^2}{4} + 4 = \frac{y_1 + 4}{x_1 - 1} \cdot x$ .

$(x - 1)$ , 整理得  $x^2 - \frac{x_1^2 + 16}{x_1 - 1}x + \frac{x_1^2 + 16}{x_1 - 1} + 16 = 0$ ,

显然  $x_1 + x_3 = \frac{x_1^2 + 16}{x_1 - 1}, x_1 x_3 = \frac{x_1^2 + 16}{x_1 - 1} + 16$ , (8分)

于是  $x_1 + x_3 + 16 = x_1 x_3$ ,

又  $x_1 x_2 = -16$ , 联立消去  $x_1$  得  $x_2 x_3 + 16(x_2 + x_3) - 16 = 0$ , (9分)

设直线  $BE$  的方程为  $y = k_2 x + m$ , 联立  $\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = k_2 x + m, \end{cases}$

整理得  $x^2 - 4k_2 x - 4m = 0$ , (10分)

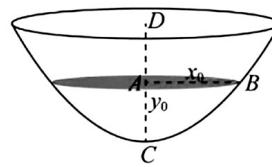
$x_2 x_3 = -4m, x_2 + x_3 = 4k_2$ ,

因此  $-4m + 64k_2 - 16 = 0$ , 即  $m = 16k_2 - 4$ , (11分)

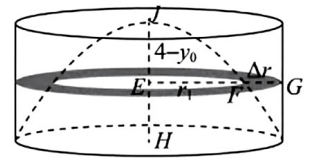
故直线  $y = k_2 x + 16k_2 - 4$  恒过定点  $(-16, -4)$ .

(3) 解: (此问作答过程中, 若没有运用祖暅原理数学思想解答, 则不得分)

解法一:



①几何体  $\Omega$



②几何体  $\Phi$

作底面半径  $R = 4$ , 高  $h = 4$  的圆柱, 并将内部切割去掉  $\Omega$  之后, 上下翻转得到几何体  $\Phi$ , (13分)

现做一平面, 使其平行于  $\Omega$  和  $\Phi$  的底面, 且被两几何体分别截得如图中阴影所示截面.

在图①的几何体  $\Omega$  中, 设  $B(x_0, y_0)$  ( $x_0 > 0, y_0 > 0$ ), 即  $AB = x_0, AC = y_0, AD = 4 - y_0$ , 且  $x_0^2 = 4y_0$ , (14分)

则在图②的几何体  $\Phi$  中, 令  $EF = r_1$ , 有  $EJ = 4 - y_0$ ,

由抛物线方程得  $r_1^2 = 4(4 - y_0) = 16 - 4y_0 = 16 - x_0^2$ ,

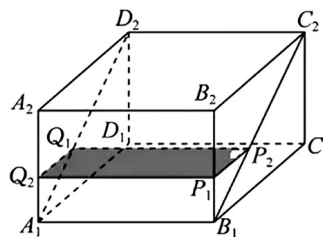
则图②中截面圆环面积  $S_2 = \pi(4^2 - r_1^2) = \pi x_0^2$ , (16分)

而图①中截面圆面积  $S_1 = \pi x_0^2$ ,

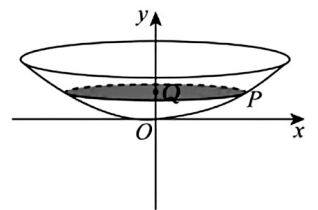
由祖暅原理可得  $\Omega$  和  $\Phi$  的体积相等, 均为圆柱体积的一半, 即  $\Omega$  的体积  $V_\Omega = \frac{1}{2} \pi R^2 h = \frac{1}{2} \pi \times 4^2 \times 4 = 32\pi$ .

(17分)

解法二:



③



④

如图③, 作长方体  $A_1 B_1 C_1 D_1 - A_2 B_2 C_2 D_2$ , 令  $A_1 B_1 = 4, C_1 B_1 = 4\pi, C_1 C_2 = 4$ , (13分)

如图④, 设曲线  $x^2 = 4y$  ( $0 \leq x \leq 4$ ) 上一点为  $P(x, y)$ , 过  $P$  作  $PQ$  垂直  $y$  轴, 交  $y$  轴于点  $Q$ , 则图④中截面面积  $S_{\text{截面}} = \pi x^2$ , (14分)

在长方体棱  $B_1 B_2$  上取一点  $P_1$ , 过点  $P_1$  作平行于底面的平面  $P_1 P_2 Q_1 Q_2$ , 分别交  $B_1 C_2, A_1 D_2, A_1 A_2$  于点  $P_2, Q_1, Q_2$ ,

设  $P_1 B_1 = \frac{x^2}{4}, P_1 P_2 = \frac{\pi x^2}{4}$ ,

则四边形  $P_1 P_2 Q_1 Q_2$  的面积  $S_{\text{四边形 } P_1 P_2 Q_1 Q_2} = \pi x^2$ ,

所以  $S_{\text{截面}} = S_{\text{四边形 } P_1 P_2 Q_1 Q_2} = \pi x^2$ , (16分)

由祖暅原理可得  $\Omega$  的体积  $V_\Omega = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\pi \times 4 = 32\pi$ .

(17分)

**辽宁省名校联盟 2025 年高二 3 月份联合考试**  
**数学**

题号	题型	分值	考查的主要内容及知识点	难度
1	选择题	5	两条直线的位置关系	易
2	选择题	5	二项式定理中求指定项及各项系数和	易
3	选择题	5	直线的方向向量,空间点到线的距离	易
4	选择题	5	二项分布的期望和方差,期望方差的性质	易
5	选择题	5	排列组合相关问题	中
6	选择题	5	直线和圆的问题,转化思想	中
7	选择题	5	排列组合、二项式定理的逆用	难
8	选择题	5	双曲线的离心率,平面向空间变化	难
9	选择题	6	线性回归的考查	易
10	选择题	6	立体几何(基底表示、坐标表示)数形结合	中
11	选择题	6	椭圆与圆的问题	难
12	填空题	5	正态分布、均值不等式	易
13	填空题	5	概率问题	中
14	填空题	5	立体几何对称转化、点到面的距离	中
15	解答题	13	统计独立性检验、二项分布	易
16	解答题	15	正态分布、条件概率、全概率公式、贝叶斯公式	中
17	解答题	15	立体几何(翻折、线面角、二面角、存在性问题)	中
18	解答题	17	超几何分布、概率最值问题	中
19	解答题	17	抛物线中的最值、定点问题、平面变立体的理解	难