东北师大附中
哈尔滨师大附中
辽宁省实验中学

2026年高三第一次联合模拟考试

数学试卷

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

1．已知集合 $A=\{x|-1<x<1\}$，$B=\{x|0\le x\le 2\}$，则 $A\cup B=$

A．$\{x|-1<x<2\}$　　B．$\{x|-1<x\le 2\}$

C．$\{x|0\le x<1\}$　　D．$\{x|0\le x\le 2\}$

2．复数$\dfrac{5}{\mathrm{i}-2}$的共轭复数是

A．$\mathrm{i}+2$　　B．$-2-\mathrm{i}$　　C．$-2+\mathrm{i}$　　D．$2-\mathrm{i}$

3．样本数据2，8，14，16，20的第60百分位数是

A．14　　B．15　　C．16　　D．18

4．命题“$\exists x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^x>\ln x+1$”的否定是

A．$\forall x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^x\le\ln x+1$　　B．$\exists x\in\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^x\le\ln x+1$

C．$\forall x\notin\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^x>\ln x+1$　　D．$\exists x\notin\mathbf{R}$，$\mathrm{e}^x>\ln x+1$

5．设l,m是两条不同的直线，α,β是两个不同的平面，以下说法正确的是

A．若$l\perp m,m//\alpha$，则$l\perp\alpha$

B．若$l//\beta,\alpha\perp\beta$，则$l\perp\alpha$

C．若$l\perp m,m\perp\beta,\alpha\perp\beta$，则$l\perp\alpha$

D．若$l\perp\beta,m\perp\beta,m\perp\alpha$，则$l\perp\alpha$

6．已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，准线为l,P为抛物线上一点，作$PM\perp l$于点M，若ΔPMF

为等边三角形，则 P 点的横坐标为

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

7．已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 为等差数列，其前 n 项和分别为 S_n，T_n，且满足 $(n+1)a_n=(2n+1)b_{n+1}$，则 $\frac{S_7}{T_7}=$

A．$\frac{15}{7}$　　B．$\frac{15}{8}$　　C．$\frac{9}{4}$　　D．$\frac{9}{5}$

8．若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1)+f(x-1)=f(2)$，$f(x+1)$ 是奇函数，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，则 $\sum_{k=1}^{6}kf(\frac{2k-1}{2})=$

A．-1　　B．0　　C．1　　D．2

二、多项选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，公众号悦爱学堂全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9．下列关于函数 $f(x)=\sin 2x+2\sin x$（$x\in\mathrm{R}$）的说法正确的是

A．$f(x)$ 为奇函数

B．$x=\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴

C．$f(x)$ 为周期函数，且最小正周期为 π

D．$f(x)$ 的值域为 $[-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}]$

10．已知 $(2-x)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$，则

A．$a_0=2^8$

B．$a_1+a_2+\cdots+a_8=1$

C．$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_8|=3^8$

D．$a_1+2a_2+3a_3\cdots+8a_8=-8$

11．已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，其左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 A 在 C 的右支上，直线 AF_2 与 C 交于另一点 B，AB 的中点为 M，O 为坐标原点，则下列说法错误的是

A．存在点 A，使得直线 AF_2 的斜率为 2

B．存在点 A，使得 $\angle F_1AF_2=90^{\circ}$

C．存在点 A，使得 $|OA|<|AF_2|$

D．存在点 A，使得点 M 的横坐标为 $2a$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $\vec{a}=(3,4)$，$\vec{b}=(m,5)$，且 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影向量的坐标为__________.

13.圆台母线长为 3，上、下底面半径比为 $1:2$，当圆台体积最大时，以此圆台的上、下底面为截面的球的表面积为__________.

14. 有 n 个编号分别为 $1,2,\cdots$，n 的盒子，第 1 个盒子中有 2 个红球 1 个白球，其余盒子中为 1 个红球 1 个白球，现从第 1 个盒子中任取一球放入第 2 个盒子，再从第 2 个盒子中任取一球放入第 3 个盒子，以此类推，则从第 2 个盒子中取到白球的概率是__________，从第 n 个盒子中取到白球的概率是__________.

四、解答题：本大题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15．（13 分）

在 ΔABC 中，角 A,B,C 对边分别为 a,b,c，且 $a\sin A-c\sin C=(b-c)\sin B$．

（1）求角 A；

（2）若 ΔABC 为锐角三角形，求 $\dfrac{b}{c}$ 的取值范围.

16．（15 分）

截至 2025 年底，我国新能源汽车保有量达到 4397 万辆，占汽车总产量的 12%．某城市研究小组调查了 300 名汽车驾驶员对新能源汽车和燃油汽车的偏好程度，将调查结果整理成如下列联

表．现统计得出样本中偏好燃油汽车的人数占样本总数的50%，女性驾驶员的样本占样本总数的$\frac{4}{15}$，偏好燃油汽车的男性驾驶员的样本有120人．

	偏好燃油汽车	偏好新能源汽车	合计
男性驾驶员	120		
女性驾驶员			
合计			300

（1）请根据已知条件将上述列联表补充完整，并依据小概率值$\alpha=0.01$的独立性检验，分析对燃油汽车和新能源汽车的偏好是否与驾驶员性别有关联．如果有关联，解释它们之间如何影响．

（2）现从女性驾驶员中按对燃油汽车和新能源汽车的偏好用分层抽样法抽取8人做进一步访谈，然后从这8人中随机抽取3人填写调查问卷，记抽取的3人中偏好新能源汽车的人数为X，求X的分布列及数学期望．

参考公式及数据：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$．

α	0.1	0.05	0.01	0.005	0.001
x_α	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

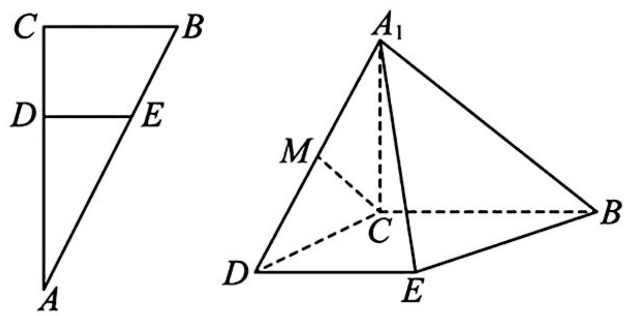
17.（15 分）

在 ΔABC 中，$\angle C=90^{\circ}$，$BC=3$，$AC=6$，D,E 分别是 AC,AB 上的点，满足 $DE // BC$，且 $CD=2$．将 ΔADE 沿 DE 折起到 ΔA_1DE 的位置，使 $A_1C\perp CD$，存在动点 M 使 $\overrightarrow{A_1M}=\lambda\overrightarrow{A_1D}(\lambda>0)$，如图所示.

（1） 求证：平面 $A_1CB\perp$ 平面 $BCDE$；

（2）当 $\lambda=\dfrac{1}{2}$ 时，公众号悦爱学堂求平面 CMB 与平面 MBE 夹角的余弦值；

（3） 设直线 BM 与平面 A_1BE 所成角为 θ，当 $\sin\theta$ 取得最大值时，求三棱锥 V_{M-BCE} 的体积.



18.（17 分）

已知椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$，短轴长为 $2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 Γ 的方程；

（2）设 A,B,C 均为椭圆 Γ 上的动点.

（i）若直线 AC、直线 BC 分别过 Γ 的左右焦点，记直线 AC、AB、BC 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，当 k_1,k_2,k_3 成等差数列时，求点 C 的坐标；

（ii）若 ΔABC 的重心是坐标原点 O，证明：ΔABC 的面积是定值.

19. （17 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x-a}\left(a\in\mathrm{R}\right)$.

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 过原点 $\left(0,0\right)$ 的切线为 $y=\mathrm{e}x$，求实数 a 的值；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 的图象与 $\odot O:x^2+y^2=r^2\left(r>0\right)$ 相交于两个不同点 A,B，记直线 AB 的斜率为 k.

（i）当 $r=\sqrt{2}$ 时，求实数 a 取值范围；

（ii）当 $r=\dfrac{2}{3}$ 时，证明：$k<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

东北师大附中　　2026年高三第一次联合模拟考试
哈尔滨师大附中　　数学参考答案
辽宁省实验中学

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	B	A	D	C	C	A

二、多项选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得6分，部分选对的得部分分，有选错的得0分．

题号	9	10	11
答案	AD	AD	ABD

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分．

12. $\left(\frac{15}{4},5\right)$　　13. 171π　　14. $\frac{4}{9},\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$

四、解答题：本大题共5小题，共77分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

15.（13分）

解:（1）由 $a\sin A-c\sin C=(b-c)\sin B$，

则根据正弦定理有 $a^2-c^2=(b-c)b$，即 $a^2=b^2+c^2-bc$，　　--------2分

又由余弦定理有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $2\cos A=1$，　　--------4分

所以在 ΔABC 中，得 $A=\frac{\pi}{3}$；　　--------6分

（2）由 ΔABC 为锐角三角形，且 $A=\frac{\pi}{3}$，则有 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2}\\0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，得 $C\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$，　　--------8分

即 $\tan C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$，即 $\frac{1}{\tan C}\in\left(0,\sqrt{3}\right)$，　　--------10分

根据正弦定理，

$$\frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+C\right)}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\tan C}+\frac{1}{2}\in\left(\frac{1}{2},2\right).$$ -------13 分

16.（15 分）

解：（1）由题意，列联表补充如下： --------2 分

	偏好燃油汽车	偏好新能源汽车	合计
男性驾驶员	120	100	220
女性驾驶员	30	50	80
合计	150	150	300

零假设为 H_0：对燃油汽车和新能源汽车的偏好与驾驶员的性别无关联． --------3 分

根据列联表数据，计算得

$$\chi^2=\frac{300\times(120\times 50-100\times 30)^2}{220\times 80\times 150\times 150}\approx 6.818>6.635=x_{0.01}.$$ --------5 分

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，可以推断 H_0 不成立，即认为对燃油汽车和新能源汽车的偏好与驾驶员的性别有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.01． --------6 分

男性驾驶员中偏好新能源汽车的频率为 $\frac{100}{220}\approx 0.455$，女性驾驶员中偏好新能源汽车的频率为 $\frac{50}{80}=0.625$，前者明显小于后者．根据频率稳定于概率的原理，我们可以认为女性驾驶员偏好新能源汽车的概率更大． --------7 分

（2）由题意，抽取的 8 人中偏好燃油汽车的人数为 3 人，偏好新能源汽车的人数为 5 人．随机变量 X 的可能值为 0，1，2，3． --------8 分

$$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56},\quad P(X=1)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56},$$

$$P(X=2)=\frac{C_3^1C_5^2}{C_8^3}=\frac{15}{28},\quad P(X=3)=\frac{C_5^3}{C_8^3}=\frac{5}{28}.$$

所以，随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

--------13 分

X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{15}{56}+2\times\frac{15}{28}+3\times\frac{5}{28}=\frac{15}{8}$． --------15 分

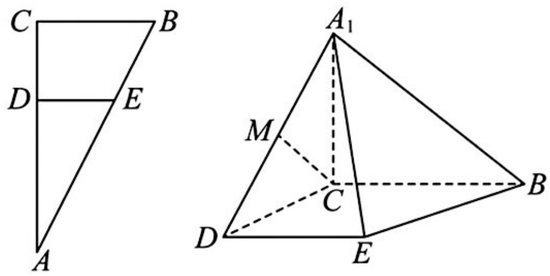
17.（15 分）

（1）证明：因为$\angle C=90°$，则$AC\perp BC$，且$DE//BC$，可得$AC\perp DE$，

将ΔADE沿DE折起到ΔA_1DE的位置，始终有$DE\perp A_1D$，$DE\perp CD$，

因为$A_1D\cap CD=D$，$A_1D,CD\subset$平面A_1CD，所以$DE\perp$平面A_1CD，　　--------2 分

由$A_1C\subset$平面A_1CD，可得$DE\perp A_1C$，



且$A_1C\perp CD$，$CD\cap DE=D$，$CD,DE\subset$平面$BCDE$，

所以$A_1C\perp$平面$BCDE$.　　--------4 分

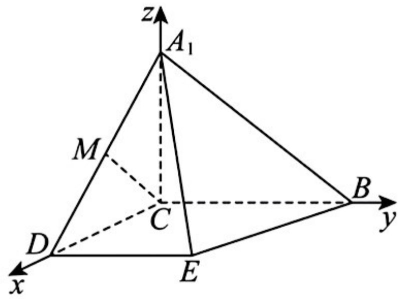
又$A_1C\subset$平面A_1CB，

所以面$A_1CB\perp$平面$BCDE$.　　--------5 分

解：（2）由（1）可知，A_1C，CD，CB两两垂直，翻折前，因为$DE//BC$，且$CD=2$，

所以$AD=4$，$\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$，所以$DE=\dfrac{2}{3}BC=2$，

翻折后$A_1D=4$，



由勾股定理得$A_1C=\sqrt{A_1D^2-CD^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，

所以以C为原点，直线CD，CB，CA_1分别为x，y，z轴建立

如图公众号悦爱学堂所示的空间直角坐标系，--------6 分

当$\lambda=\dfrac{1}{2}$时，$C(0,0,0)$，$A_1(0,0,2\sqrt{3})$，$D(2,0,0)$，$B(0,3,0)$，$E(2,2,0)$，

$M(1,0,\sqrt{3})$，可得$\overrightarrow{CM}=(1,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{MB}=(-1,3,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{BE}=(2,-1,0)$，

设平面BMC的法向量$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CM}=x_1+\sqrt{3}z_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{MB}=-x_1+3y_1-\sqrt{3}z_1=0\end{cases}$，

令$z_1=\sqrt{3}$，则$x_1=-3$，$y_1=0$，可得$\vec{m}=(-3,0,\sqrt{3})$，　　--------7 分

设平面BME的法向量$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MB}=-x_2+3y_2-\sqrt{3}z_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE}=2x_2-y_2=0\end{cases}$，

令$x_2=1$，则$y_2=2$，$z_2=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$，可得$\vec{n}=\left(1,2,\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$，　　--------8 分

设平面CMB与平面MBE夹角为φ

则 $\cos\varphi=\left|\cos<\vec{m},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}\right|=\left|\dfrac{(-3)\times1+0\times2+\sqrt{3}\times\dfrac{5}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\sqrt{5+(\dfrac{5}{\sqrt{3}})^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{10}}{20}$.

所以平面 CMB 与平面 MBE 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{20}$. --------10 分

（3）由（2）可知 $\overrightarrow{BA_1}=\left(0,-3,2\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(2,-1,0\right)$，$\overrightarrow{A_1D}=\left(2,0,-2\sqrt{3}\right)$

设平面 A_1BE 的法向量 $\vec{p}=\left(x_3,y_3,z_3\right)$，则 $\begin{cases}\vec{p}\cdot\overrightarrow{BA_1}=-3y_3+2\sqrt{3}z_3=0\\ \vec{p}\cdot\overrightarrow{BE}=2x_3-y_3=0\end{cases}$，

令 $x_3=1$，则 $y_3=2$，$z_3=\sqrt{3}$，可得 $\vec{p}=\left(1,2,\sqrt{3}\right)$， --------11 分

且 $M\left(2\lambda,0,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda\right),\overrightarrow{BM}=\left(2\lambda,-3,2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\lambda\right)$， --------12 分

因为直线 BM 与平面 A_1BE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos<\vec{p},\overrightarrow{BM}>\right|=\dfrac{\left|\vec{p}\cdot\overrightarrow{BM}\right|}{|\vec{p}|\cdot\left|\overrightarrow{BM}\right|}$

$$=\frac{4\lambda}{2\sqrt{2}\times\sqrt{16\lambda^2-24\lambda+21}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\dfrac{21}{\lambda^2}-\dfrac{24}{\lambda}+16}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{21\left(\dfrac{1}{\lambda}-\dfrac{4}{7}\right)^2+\dfrac{64}{7}}}\le\frac{\sqrt{14}}{8}$$

当且仅当 $\lambda=\dfrac{7}{4}$ 时，等号成立，$\sin\theta$ 取最大值. --------14 分

$S_{\Delta BCE}=3$, 由 $\overrightarrow{A_1M}=\dfrac{7}{4}\overrightarrow{A_1D}$ 得，点 M 到平面 BCE 的距离为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$V_{M-BCE}=\dfrac{1}{3}\times3\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

所以三棱锥 V_{M-BCE} 的体积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. --------15 分

18.（17 分）

解：（1）由题意，$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\\ 2b=2\sqrt{3}\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $a=2,b=\sqrt{3}$， --------3 分

所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. --------4 分

（2）（i）设 $C(x_0,y_0)$，则 $k_1=\dfrac{y_0}{x_0+1}$，$k_3=\dfrac{y_0}{x_0-1}\Rightarrow k_1+k_3=\dfrac{y_0}{x_0+1}+\dfrac{y_0}{x_0-1}=\dfrac{2x_0y_0}{x_0^2-1}$.--------6 分

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，$l_{CA}:x=t_1y-1$，$l_{CB}:x=t_2y+1$，其中 $t_1=\dfrac{1}{k_1},t_2=\dfrac{1}{k_3}$，

由 $\begin{cases}x=t_1y-1\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$，消去 x，得 $(3t_1^2+4)y^2-6t_1y-9=0$，

则 $y_1y_0=\dfrac{-9}{3t_1^2+4}=\dfrac{-9}{3\left(\dfrac{x_0+1}{y_0}\right)^2+4}=\dfrac{-9y_0^2}{3x_0^2+4y_0^2+6x_0+3}=\dfrac{-9y_0^2}{6x_0+15}=\dfrac{-3y_0^2}{2x_0+5}\Rightarrow y_1=\dfrac{-3y_0}{2x_0+5}$

从而 $x_1=t_1y_1-1=\dfrac{x_0+1}{y_0}\cdot\dfrac{-3y_0}{2x_0+5}-1=-\dfrac{5x_0+8}{2x_0+5}$

同理，可得 $y_2=\dfrac{3y_0}{2x_0-5}$，$x_2=\dfrac{5x_0-8}{2x_0-5}$

则 $k_2=k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{-\dfrac{3y_0}{2x_0+5}-\dfrac{3y_0}{2x_0-5}}{-\dfrac{5x_0+8}{2x_0+5}-\dfrac{5x_0-8}{2x_0-5}}$ --------8 分

$=\dfrac{3y_0(2x_0-5+2x_0+5)}{(5x_0+8)(2x_0-5)+(5x_0-8)(2x_0+5)}=\dfrac{3x_0y_0}{5(x_0^2-4)}$

由 k_1,k_2,k_3 成等差数列，得 $k_1+k_3=2k_2$，即 $\dfrac{2x_0y_0}{x_0^2-1}=2\cdot\dfrac{3x_0y_0}{5(x_0^2-4)}$

解得 $x_0=0$，或 $y_0=0$（舍），或 $x_0^2=\dfrac{17}{2}>4$（舍）．相应的，$y_0^2=3$

所以点 C 的坐标为 $(0,\pm\sqrt{3})$． --------10 分

（ii）设 $C(x_0,y_0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

当直线 AB 的斜率不存在时，易得 $C(2,0)$，直线 AB 的方程为 $x=-1$，或 $C(-2,0)$，直线 AB 的方程为 $x=1$．将 $x=\pm1$ 代入椭圆的方程，可得 $|y|=\dfrac{3}{2}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times3\times3=\dfrac{9}{2}$． --------11 分

当直线 AB 的斜率存在时，AB 的中点 $M\left(-\dfrac{x_0}{2},-\dfrac{y_0}{2}\right)$，$k_{AB}=-\dfrac{3x_0}{4y_0}$（点差法可得），

所以直线 AB 的方程为 $y+\dfrac{y_0}{2}=-\dfrac{3x_0}{4y_0}\left(x+\dfrac{x_0}{2}\right)$，

即 $y=-\dfrac{3x_0}{4y_0}x-\dfrac{3}{2y_0}\left(\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}\right)=-\dfrac{3x_0}{4y_0}x-\dfrac{3}{2y_0}$． --------12 分

令 $x=0$，可得直线 AB 在 y 轴上的截距为 $-\dfrac{3}{2y_0}$，则 $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|-\dfrac{3}{2y_0}\right|\cdot|x_1-x_2|$． --------13 分

将 $y=-\dfrac{3x_0}{4y_0}x-\dfrac{3}{2y_0}$ 代入椭圆的方程，得 $\dfrac{12y_0^2+9x_0^2}{4y_0^2}x^2+\dfrac{9x_0}{y_0^2}x+\dfrac{9}{y_0^2}-12=0$，

即 $\dfrac{3}{y_0^2}x^2+\dfrac{3x_0}{y_0^2}x+\dfrac{3}{y_0^2}-4=0$，则 $x_1+x_2=-x_0, x_1x_2=\dfrac{3-4y_0^2}{3}$， --------14 分

所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\dfrac{\sqrt{9x_0^2+48y_0^2-36}}{3}=\dfrac{\sqrt{36-12y_0^2+48y_0^2-36}}{3}=2|y_0|$·

所以 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot|-\dfrac{3}{2y_0}|\cdot 2|y_0|=\dfrac{3}{2}$． --------16 分

又因为 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle OAB}=\dfrac{9}{2}$．

综上，$\triangle ABC$ 的面积是定值 $\dfrac{9}{2}$． --------17 分

19. 公 众 号 悦 爱 学 堂（17 分）

解：（1）在 $x=x_0$ 处的切线为 $y-e^{x_0-a}=e^{x_0-a}(x-x_0)$，将 $(0,0)$ 代入得 $x_0=1, a=0$ --------2 分

（2）（i）当 $r=\sqrt{2}$ 时，原问题 $\Leftrightarrow x^2+e^{2x-2a}=2$ 有两个不等实根. --------3 分

法一：设 $u(x)=\dfrac{x^2-2}{e^{2x}}\left(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right)$， --------4 分

则 $u'(x)=\dfrac{2x-2(x^2-2)}{e^{2x}}=-\dfrac{2(x-2)(x+1)}{e^{2x}}$

$\therefore$ 当 $-\sqrt{2}<x<-1$ 时，$u'(x)<0$，当 $-1<x<\sqrt{2}$ 时，$u'(x)>0$

$\therefore u(x)$ 在 $\left(-\sqrt{2},-1\right)$ 递减，$\left(-1,\sqrt{2}\right)$ 递增，

$u(x)_{极小值}=u(-1)=-e^2, u\left(\sqrt{2}\right)=0, \therefore -e^{-2a}\in\left(-e^2,0\right)\therefore a>-1$ --------7 分

法二：$g(x)=x^2+e^{2x-2a}-2\left(-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\right)$ --------4 分

$g'(x)=2x+2e^{2x-2a}$，$g''(x)=2+4e^{2x-2a}>0$，$\therefore g'(x)$ 在 R 上递增，

$\exists x_0\in$ R，使得 $g'(x_0)=0, \therefore$ 当 $x<x_0$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$g'(x)>0$

$g(x)$在当$(-\infty,x_0)$递减，$(x_0,+\infty)$递增，

$g(x)_{极小值}=g(x_0)=x_0{}^2-x_0-2<0\Rightarrow -1<x_0<\sqrt{2}$ --------5 分

又$-e^{-2a}=\dfrac{x_0}{e^{2x_0}}$

设$t(x)=\dfrac{x}{e^{2x}}\left(-1<x<\sqrt{2}\right)$，则$t'(x)=\dfrac{1-2x}{e^{2x}}$

当$-1<x<\dfrac{1}{2}$时，$t'(x)>0$，当$\dfrac{1}{2}<x<\sqrt{2}$时，$t'(x)<0$，

$\therefore t(x)\in\left(-e^2,\dfrac{1}{2e}\right]\therefore -e^2<-e^{-2a}\le\dfrac{1}{2a}\Rightarrow a>-1.$ --------7 分

（ii）设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，不妨设$x_1<x_2$

则$0<e^{x_1-a}<e^{x_2-a}$，即$0<y_1<y_2,\therefore k>0$

令$\begin{cases}x_1=\dfrac{2}{3}\cos\theta_1\\ y_1=\dfrac{2}{3}\sin\theta_1\end{cases},\begin{cases}x_2=\dfrac{2}{3}\cos\theta_2\\ y_2=\dfrac{2}{3}\sin\theta_2\end{cases}\left(\theta_1,\theta_2\in(0,\pi)\right)$

则$\ln\left(\dfrac{2}{3}\sin\theta_i\right)=\dfrac{2}{3}\cos\theta_i-a\,(i=1,2)\Rightarrow\theta_1,\theta_2$是方程$a=\dfrac{2}{3}\cos x-\ln\left(\dfrac{2}{3}\sin x\right)$两个根. --------8 分

又$\because k=\dfrac{\sin\theta_1-\sin\theta_2}{\cos\theta_1-\cos\theta_2}=\dfrac{2\cos\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{-2\sin\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cdot\sin\left(\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}=-\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}>0$

欲证$k<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，只需证$-\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)}<\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{k}=\tan\left(\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)<-\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}<\dfrac{2}{3}\pi\Leftrightarrow\pi<\theta_1+\theta_2<\dfrac{4}{3}\pi$ --------9 分

设$h(x)=\dfrac{2}{3}\cos x-\ln\left(\dfrac{2}{3}\sin x\right)\left(x\in(0,\pi)\right)$

则$h'(x)=-\dfrac{2}{3}\sin x-\dfrac{\cos x}{\sin x}=-\dfrac{2\left(1-\cos^2x\right)+3\cos x}{3\sin x}=\dfrac{(2\cos x+1)(\cos x-2)}{3\sin x}$

$\therefore$当$0<x<\dfrac{2}{3}\pi$时，$h'(x)<0$；当$\dfrac{2}{3}\pi<x<\pi$时，$h'(x)>0$；

$\therefore h(x)$在$\left(0,\frac{2}{3}\pi\right)$递减，$\left(\frac{2}{3}\pi,\pi\right)$递增，　　--------12 分

设$\varphi(x)=h(x)-h\left(\frac{4}{3}\pi-x\right)\left(\frac{2}{3}\pi<x<\pi\right)$　　--------13 分

下面证明$\varphi'(x)=h'(x)+h'\left(\frac{4}{3}\pi-x\right)>0$

$$\varphi'(x)=h'(x)+h'\left(\frac{4}{3}\pi-x\right),x\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$$

$$=-\left[\frac{2}{3}\sin x+\frac{2}{3}\sin\left(\frac{4}{3}\pi-x\right)\right]-\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$=-\frac{4}{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{\sqrt{3}\left[4\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-3\right]}{6\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$$

设$\alpha=x-\frac{\pi}{6},\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$，则$\sin\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$

$$4\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=4\sin\alpha\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=4\sin\alpha\left(\frac{3}{4}\sin^2\alpha-\frac{1}{4}\cos^2\alpha\right)=4\sin\alpha\left(\sin^2\alpha-\frac{1}{4}\right)=\sin\alpha\left(4\sin^2\alpha-1\right)<3$$

故$\varphi'(x)>0$.

$\therefore\varphi(x)$在$\left(\frac{2}{3}\pi,\pi\right)$递增，$\therefore\varphi(x)>\varphi\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0$，　　--------15 分

$\therefore\varphi(\theta_2)>0,h(x)=h(\theta_2)>h\left(\frac{4}{3}\pi-\theta_2\right)$，

又$\because h(x)$在$\left(0,\frac{2}{3}\pi\right)$递减，$\theta_1<\frac{4}{3}\pi-\theta_2\Rightarrow\theta_1+\theta_2<\frac{4}{3}\pi$，故$k<\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　--------17 分