绝密★启用前

# 2025年普通高等学校招生全国统一考试
# 数 学

类 型：新课标Ⅱ卷

命 制：教育部教育考试院

适 用：重庆、黑龙江、吉林、辽宁、山西、海南、广西、四川、内蒙古、云南、贵州、甘肃、新疆、西藏、新疆、青海、宁夏

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

## 一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的。

**1** 样本数据2，8，14，16，20的平均数为 ( $C$ )

$A.$ 8　　$B.$ 9　　$C.$ 12　　$D.$ 18

解：$\bar{x}=\dfrac{2+8+14+16+20}{5}=12$

**2** 已知 $z=1+\mathrm{i}$，则 $\dfrac{1}{z-1}=$ ( $A$ )

$A.$ $-\mathrm{i}$　　$B.$ $\mathrm{i}$　　$C.$ $-1$　　$D.$ 1

解：$\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{1+i-1}=\dfrac{1}{i}=-\mathrm{i}$

**3** 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}$，则 $A\cap B=$ ( $D$ )

$A.$ $\{0,1,2\}$　　$B.$ $\{1,2,8\}$　　$C.$ $\{2,8\}$　　$D.$ $\{0,1\}$

解：$\because$ $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}=\{-1,0,1\}$，$\therefore$ $A\cap B=\{0,1\}$

**4** 不等式 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集是 ( $C$ )

$A.$ $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$　　$B.$ $\{x\mid x\leqslant -2\}$　　$C.$ $\{x\mid -2\leqslant x<1\}$　　$D.$ $\{x\mid x>1\}$

解：法一：设不等式 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集为 $D$，则 $1\notin D$，$-1.5\in D$.

法二 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2\Leftrightarrow\dfrac{x-4}{x-1}-2\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{-x-2}{x-1}\geqslant 0\Leftrightarrow-(x+2)(x-1)\geqslant 0$ 且 $x-1\neq 0\Leftrightarrow -2\leqslant x<1$.

**5** 在 $\triangle ABC$ 中，$BC=2$，$AC=1+\sqrt{3}$，$AB=\sqrt{6}$，则 $A=$ ( $A$ )

$A.$ 45°　　$B.$ 60°　　$C.$ 120°　　$D.$ 135°

解：法一：$\because$ $BC<AC$，$BC<AB$，三边相等时，$A=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore$ $A<\dfrac{\pi}{3}$，结合选项可知 $A$ 正确

法二：$\cos A=\dfrac{AC^2+AB^2-BC^2}{2AC\cdot AB}=\dfrac{(1+\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2^2}{2\times(1+\sqrt{3})\times\sqrt{6}}=\dfrac{2(\sqrt{3}+3)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+3)}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$A\in(0,\pi)$，故 $A=\dfrac{\pi}{4}$ .

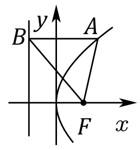
**6** 设抛物线 $C: y^2=2px(P>0)$ 的焦点为 $F$, 点 $A$ 在 $C$ 上, 过 $A$ 作 $C$ 准线的垂线, 垂足为 $B$. 若直线 $BF$ 的方程为 $y=-2x+2$, 则 $|AF|=$ ( $C$ )

$A.\ 3$　　$B.\ 4$　　$C.\ 5$　　$D.\ 6$

**解**: 由题可得 $F(1,0)$, 故 $\frac{p}{2}=1 \Longleftrightarrow p=2 \Longleftrightarrow C: y^2=4x$

$\therefore B(-1,4)$, 而抛物线 $C$ 的方程为 $y^2=4x$

$\therefore A(4,4) \Longrightarrow |AF|=5$




**7** 记 $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 若 $S_3=6, S_5=-5$, 则 $S_6=$ ( $B$ )

$A.\ -20$　　$B.\ -15$　　$C.\ -10$　　$D.\ -5$

**解**: $S_n$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, 故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 该等差数列的公差为 $d$

$\frac{S_5}{5}-\frac{S_3}{3}=2d_1 \Longrightarrow d_1=-\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{S_6}{6}=\frac{S_5}{5}+d_1=-1-\frac{3}{2} \Longrightarrow S_6=-15.$

**8** 已知 $0<\alpha<\pi, \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$ ( $D$ )

$A.\ \frac{\sqrt{2}}{10}$　　$B.\ \frac{\sqrt{2}}{5}$　　$C.\ \frac{3\sqrt{2}}{10}$　　$D.\ \frac{7\sqrt{2}}{10}$

**解**: $\because\ \alpha\in(0,\pi)$, $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\therefore\ \cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1=-\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

## 二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。全部选对得6分，选不全得3分，多选或选错一个得0分。

**9** 记 $S_n$ 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和, $q$ 为 $\{a_n\}$ 的公比, $q>0$. 若 $S_3=7.a_3=1$, 则 ( $AD$ )

$A.\ q=\frac{1}{2}$　　$B.\ a_5=\frac{1}{9}$　　$C.\ S_5=8$　　$D.\ a_n+S_n=8$

**解**: $S_3=a_1+a_2+a_3=\frac{a_3}{q^2}+\frac{a_3}{q}+a_3=\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}+1=7 \Rightarrow \frac{1}{q^2}+\frac{1}{q}-6=0 \Rightarrow \left(\frac{1}{q}+3\right)\left(\frac{1}{q}-2\right)=0$

又 $q>0$, 则 $\frac{1}{q}=2 \Longrightarrow q=\frac{1}{2}$

故 $a_1=\frac{a_3}{q^2}=4$, $a_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$, $S_n=8-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$,

$a_5=a_3q^2=\frac{1}{4}$, $S_5=8-\left(\frac{1}{2}\right)^2\neq 8$, $a_n+S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}+8-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=8$, 综上 $AD$ 正确.

**10** 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 且当 $x>0$ 时, $f(x)=(x^2-3)e^x+2$, 则 ( $ABD$ )

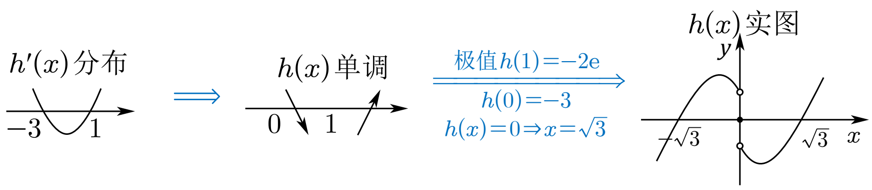
$A.\ f(0)=0$　　$B.$ 当 $x<0$ 时, $f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

$C.\ f(x)\geqslant 2$, 当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$　　$D.\ x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

**解**: $\because$ 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, $\therefore f(0)=0$, $A$ 正确

当 $x<0$ 时, $f(x)=-f(-x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$, $B$ 正确;

当 $x>0$ 时, $f(x)\geqslant 2 \Longrightarrow (x^2-3)e^x\geqslant 0$, 设 $h(x)=(x^2-3)e^x$, $h'(x)=(x^2+2x-3)e^x=(x-3)(x+1)e^x$



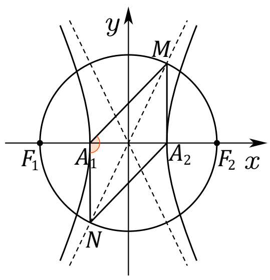

由图可知: $C$ 错误, $D$ 正确;

**11** 双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别是 $F_1,F_2$，左、右顶点分别为 $A_1,A_2$，以 $F_1F_2$ 为直径的圆与曲线 $C$ 的一条渐近线交于 $M,N$ 两点，且 $\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$，则 （ $ACD$ ）

A. $\angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$　　　　B. $|MA_1|=2|MA_2|$

C. $C$ 的离心率为 $\sqrt{13}$　　　　D. 当 $a=\sqrt{2}$ 时，四边形 $NA_1MA_2$ 的面积为 $8\sqrt{3}$

**解：** 由曲线对称性可知：$NA_1MA_2$ 为平行四边形，$\angle NA_1M=\dfrac{5\pi}{6}$，$\therefore\ \angle A_1MA_2=\dfrac{\pi}{6}$，$A$ 正确；




在 $\triangle MOA_2$ 中，$|OM|=c$，$|OA_2|=a$，由渐近线可得：$\cos\angle MOA_2=\dfrac{a}{c}$，$\therefore\ \angle MA_2O=\dfrac{\pi}{2}$

结合 A 选项可知：$|MA_1|=2|A_1A_2|=4a$，$\therefore\ |MA_2|=b=2\sqrt{3}a$，$B$ 错误；

$c^2=a^2+b^2=13a^2$，$e^2=13$，$C$ 正确；

当 $a=\sqrt{2}$ 时，$S_{NA_1MA_2}=2ab=4\sqrt{3}a^2=8\sqrt{3}$，$D$ 正确.

## 三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

**12** 已知平面向量 $\vec{a}=(x,1),\vec{b}=(x-1,2x)$，若 $\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})$，则 $|\vec{a}|=$ __$\sqrt{2}$__.

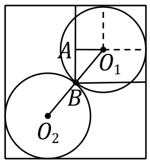
**解：** $\vec{a}-\vec{b}=(1,1-2x),\vec{a}\perp(\vec{a}-\vec{b})\Leftrightarrow\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0\Leftrightarrow x+1-2x=0\Rightarrow x=1$，故 $|\vec{a}|=\sqrt{2}$

**13** 若 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，则 $f(0)=$ __$-4$__.

**解：** $\because\ x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ 的极值点，$\therefore\ a=2$，故 $f(0)=-4$

**14** 一个底面半径为 4cm，高为 9cm 的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为 __$\dfrac{5}{2}$__ cm .

**解：** 作出轴截面如图：当两圆相切时半径最大。




两圆的公切点为圆矩形的中心，设铁球半径为 $r$，$r\in(0,4)$，

在 $Rt\triangle ABO_1$ 中，$AO_1=4-r$，$AB=\dfrac{9}{2}-r$

则有：$(4-r)^2+\left(\dfrac{9}{2}-r\right)^2=r^2$，解得：$r=\dfrac{5}{2}$ 或 $r=\dfrac{29}{2}$ 舍

## 四、解答题：本题共5小题，共77分。应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

**15** (13 分)

已知函数 $f(x)=\cos(2x+\varphi)(0\leqslant\varphi<\pi),f(0)=\dfrac{1}{2}$ .

(1) 求 $\varphi$；

(2) 设函数 $g(x)=f(x)+f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$，求 $g(x)$ 的值域和单调区间.

**解：** (1) $f(0)=\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$，由 $0\leqslant\varphi<\pi$，故 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$；

(2) 由 (1) 可知：$f(x)=\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，$\therefore\ g(x)=f(x)+f\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

故 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，

令 $2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\pi+2k\pi$，解得 $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$，

即 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$

同理可得 $g(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\dfrac{5\pi}{12}+k\pi,\dfrac{11\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$

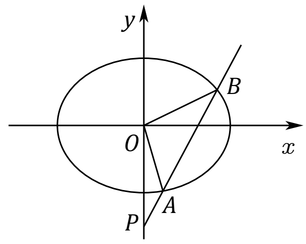
**16** (15 分)

已知椭圆 $C$:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，长轴长为 4,

(1) 求 $C$ 的方程;

(2) 过点 $(0,-2)$ 的直线 $l$ 与 $C$ 交于 $A$、$B$ 两点, $O$ 为坐标原点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\sqrt{2}$，求 $|AB|$ .

**解**: (1) $a=2$, $b=\sqrt{2}, c=\sqrt{2}$, 椭圆方程为: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ ;




(2) 设 $l$: $y=kx-2$ ，点 $P(0,-2)$ ，点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\\ y=kx-2\end{cases} \Longrightarrow (2k^2+1)x^2-8kx+4=0$

$\Delta=32k^2-16$, $\quad x_1+x_2=\frac{8k}{2k^2+1} \quad x_1x_2=\frac{4}{2k^2+1}>0$ (两根同号)

由 $\Delta>0$ ，可得 $k>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$S_{\triangle OAB}=S_{\triangle OPB}-S_{\triangle OPA}=\frac{1}{2}\times 2|x_2|-\frac{1}{2}\times 2|x_1|=|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{\Delta}}{2k^2+1}=\sqrt{2}$,

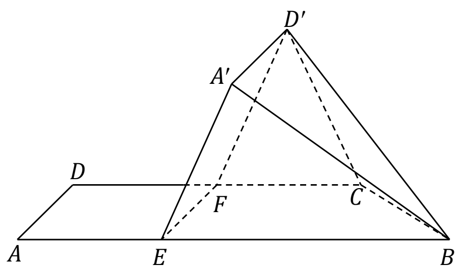
解得 $k^2=\frac{3}{2}$, $|AB|=\sqrt{k^2+1}|x_2-x_1|=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{5}$.

**17** (15 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, \angle DAB=90^\circ$ , $F$ 为 $CD$ 中点, $E$ 在 $AB$ 上, $EF \parallel AD$ , $AB=3AD$, $CD=2AD$ , 将四边形 $EFDA$ 沿 $EF$ 翻折至四边形 $EFD'A'$ , 使得面 $EFD'A'$ 与面 $EFCB$ 所成的二面角为 $60^\circ$ .

(1) 证明: $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$ .

(2) 求面 $BCD'$ 与面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值.




**解**: (1) 由 $EB \parallel FC, A'E \parallel D'F$ , 可得平面 $A'EB \parallel$ 平面 $D'FC$ ,

又由 $A'B \subset$ 平面 $A'EB$

故 $A'B \parallel$ 平面 $D'FC$ ;

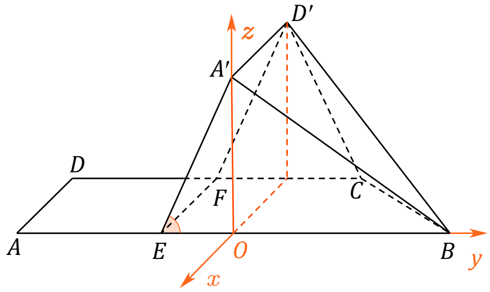
(2) 由 $EF \perp A'E$ 且 $EF \perp EB$ ,

可知 $A'EB$ 即为二面角的平面角, 为 $60^\circ$

不妨设 $AD=1$ 在平面 $A'EB$ 内, 由点 $A'$ 作 $EB$ 垂线, 垂足为 $O$,

可证 $A'O \perp$ 底面 $EBCF$, $EO=\frac{1}{2}$, $OB=\frac{3}{2}$, 如图建系,

$\overrightarrow{FE}=(1,0,0), \overrightarrow{EA'}=\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,




设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\vec{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$

则有 $\begin{cases}x_1=0\\ \frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\end{cases}$ , 取 $y_1=-\sqrt{3}$, $\vec{n_1}=(0,-\sqrt{3},1)$ ;

$\overrightarrow{CB}=(1,1,0)$ , $\overrightarrow{D'B}=\left(1,\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ,

设平面 $BCD'$ 的法向量为 $\vec{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

则有 $\begin{cases}x_2+y_2=0\\ x_1+\frac{3}{2}y_1-\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0\end{cases}$ , 取 $y_2=\sqrt{3}$ , 则 $\vec{n_2}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$

即平面 $BCD'$ 与平面 $EFD'A'$ 成角 $\theta$ , 则有 $\cos\theta=\left|\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\times|\vec{n_2}|}\right|=\frac{\sqrt{7}}{7}$ , 故 $\sin\theta=\frac{\sqrt{42}}{7}$ .

18 (17 分)

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$，其中 $0<k<\frac{1}{3}$．

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 存在唯一的极值点和唯一的零点；

(2) 设 $x_1,x_2$ 分别为 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 的极值点和零点.

(*i*) 设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，证明: $g(t)$ 在区间 $(0,x_1)$ 单调递减;

(*ii*) 比较 $2x_1$ 与 $x_2$ 的大小, 并证明你的结论.

解：(1) 证明: ∵ $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3,k\in\left(0,\frac{1}{3}\right)$，

∴ $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x-3kx^2$

$=\frac{1-1-x+x+x^2-3kx^2-3kx^3}{1+x}$

$=\frac{-3kx^2}{1+x}\left(x+1-\frac{1}{3k}\right)$,

当 $x>0$ 时, 令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{3k}-1>0$，

∴当 $0<x<\frac{1}{3k}-1$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x>\frac{1}{3k}-1$ 时, $f'(x)<0,f(x)$ 单调递减,

∴ $x=\frac{1}{3k}-1$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上唯一的极值点, 是极大值点.

又∵ $f\left(\frac{1}{3k}-1\right)>f(0)=0$, $f\left(\frac{1}{2k}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2k}<0$，

∴ $\exists x_2\in\left(\frac{1}{3k}-1,\frac{1}{2k}\right)$, $f(x_2)=0$，

即 $x_2$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上唯一的零点;

(2) 解:(i) ∵ $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，

∴ $g'(t)=f'(x_1+t)+f'(x_1-t)$

$=\frac{-3k(x_1+t)^2}{1+x_1+t}(x_1+t-x_1)+\frac{-3k(x_1-t)^2}{1+x_1-t}(x_1-t-x_1)$

$=3kt\left[\frac{(x_1-t)^2}{1+x_1+t}+\frac{(x_1+t)^2}{1+x_1-t}\right]$

$=\frac{6kt^2(t^2-x_1^2-2x_1)}{(1+x_1)^2-t^2}$，

∵ $t\in(0,x_1)$，∴ $t^2-x_1^2-2x_1<0,(1+x_1)^2-t^2>0$，

∴ $g'(t)=\frac{6kt^2(t^2-x_1^2-2x_1)}{(1+x_1)^2-t^2}<0$，

即 $g(t)$ 在 $t\in(0,x_1)$ 上单调递减;

(*ii*) 由 (i) 得, $g(t)$ 在 $t\in(0,x_1)$ 上单调递减,

∴ $g(x_1)<g(0)$，

即 $f(2x_1)-f(0)<f(x_1)-f(x_1)=0,f(2x_1)<0$，

∵ $x_2$ 是 $f(x)$ 的零点, ∴ $f(x_2)=0$，

∴ $f(2x_1)<f(x_2)$，

又∵ $x_2>x_1,2x_1>x_1$，且 $f(x)$ 在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递减,

∴ $2x_1>x_2$．

**19** (17 分)

甲、乙两人进行乒乓球练习, 每个球胜者得 1 分、负者得 0 分. 设每个球甲胜的概率为 $p\left(\frac{1}{2}<p<1\right)$, 乙胜的概率为 $q, p+q=1$, 且各球的胜负相互独立, 对正整数 $k \geqslant 2$, 记 $p_k$ 为打完 $k$ 个球后甲比乙至少多得 2 分的概率, $q_k$ 为打完 $k$ 个的球后乙比甲至少多得 2 分的概率.

(1) 求 $p_3, p_4$ (用 $p$ 示)

(2) 若 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=4$, 求 $p$;

(3) 证明: 对任意正整数 $m, p_{2m+1}-q_{2m+1}<p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$.

**解**: (1)3 球后甲比乙至少多两分, 只能是甲 3 分乙 0 分, 因此 $p_3=p^3$;

4 球后甲比乙至少多两分, 可能是甲 4 分乙 0 分, 或者甲 3 分乙 1 分,

因此 $p_4=C_4^3p^3q+p^4=4p^3q+p^4=4p^3(1-p)+p^4=4p^3-3p^4$.

(2) 根据对称性, 以及 (1) 的结果, 可得 $q_3=q^3, q_4=4q^3-3q^4$.

因此 $\frac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=\frac{4p^3-3p^4-p^3}{4q^3-3q^4-q^3}=\frac{3p^3(1-p)}{3q^3(1-q)}=\frac{p^3q}{q^3p}=\frac{p^2}{q^2}=4$

因此 $\frac{p}{q}=2$, 又 $p+q=1$, 故 $p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}$.

答案为 $p=\frac{2}{3}$

(3) 记 $a_m(x)$ 表示 $m$ 球甲得 $x$ 分的概率

$$p_{2m+1}=p_{2m}-q\cdot a_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+1}=q_{2m}-p\cdot a_{2m}(m-1)$$

故

$$p_{2m+1}-p_{2m}=-q\cdot a_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+1}-q_{2m}=-p\cdot a_{2m}(m-1)$$

故要证: $$p_{2m+1}-p_{2m}<q_{2m+1}-q_{2m}$$

只需证: $$p\cdot a_{2m}(m-1)<q\cdot a_{2m}(m+1)$$

即只需证: $$p\cdot p^{m-1}\cdot q^{m+1}\cdot C_{2m}^{m-1}<q\cdot p^{m+1}\cdot q^{m-1}\cdot C_{2m}^{m+1}$$

即只需证: $$p^mq^{m+1}<q^mp^{m+1}$$

即 $q<p$. 由条件 $q=1-p<\frac{1}{2}<p$, 故结论成立.

由

$$p_{2m+2}=p_{2m+1}+p\cdot a_{2m+1}(m+1)=p_{2m}+p\cdot a_{2m+1}(m+1)-qa_{2m}(m+1)$$

$$q_{2m+2}=q_{2m+1}+q\cdot a_{2m+1}(m)=q_{2m}+q\cdot a_{2m+1}(m)-pa_{2m}(m-1)$$

现在考虑右边的不等式

$$p_{2m}-q_{2m}<p_{2m+2}-q_{2m+2}$$

只需证:

$$p\cdot a_{2m+1}(m+1)-qa_{2m}(m+1)>qa_{2m+1}(m)-p\cdot a_{2m}(m-1)$$

只需证: $$p^{m+2}q^mC_{2m+1}^{m+1}-p^{m+1}q^mC_{2m}^{m+1}>q^{m+2}p^mC_{2m+1}^{m+1}-q^{m+1}p^mC_{2m}^{m+1}$$

只需证: $$p^2C_{2m+1}^{m+1}-pC_{2m}^{m+1}>q^2C_{2m+1}^{m+1}-qC_{2m}^{m+1}$$

只需证: $$(p-q)(p+q)C_{2m+1}^{m+1}>(p-q)C_{2m}^{m+1}$$

只需证:

$$C_{2m+1}^{m+1}>C_{2m}^{m+1}$$

$\because$ $C_{2m+1}^{m+1}=C_{2m}^{m+1}+C_{2m}^{m}$, 且 $C_{2m}^{m}>0$, 故上面不等式成立. 证毕