2024—2025学年度下学期期中考试高一试题

数 学

命题人:鞍山市第三中学　白岳龙　　　　审题人:盘锦市高级中学　黄　简

考试时间:120分钟　　　　满分:150分

一、单项选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分。每小题只有一个选项符合要求)

1.集合 $M=\{x|x=k\cdot 90°+45°,k\in \mathbf{Z}\}$, $N=\{x|x=k\cdot 45°,k\in \mathbf{Z}\}$,则下列选项正确的是(　　)

A. $M\cap N=\varnothing$　　　　B. $N\subseteq M$

C. $M\subseteq N$　　　　D. $M\cup N=R$

2.达·芬奇的经典之作《蒙娜丽莎》举世闻名,画中女子神秘的微笑数百年让无数观赏者入迷,某爱好者对《蒙娜丽莎》的同比例影像作品进行了测绘,将画中女子的嘴唇近似看作一个圆弧,在嘴角 A,B 处作圆弧所在圆的切线,两条切线交于点 C ,测得 AB=12cm, $\angle ACB=\frac{2\pi}{3}$,则《蒙娜丽莎》中女子嘴唇的长度约为(单位: cm)(　　)

A.12　　　　B.4 π

C.8　　　　D.8 π

3.函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x$ 的单调减区间是(　　)

A. $\left[k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{3}\right],(k\in \mathbf{Z})$　　　　B. $\left[2k\pi-\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right],(k\in \mathbf{Z})$

C. $\left[2k\pi+\frac{\pi}{3},2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right],(k\in \mathbf{Z})$　　　　D. $\left[k\pi+\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{5\pi}{6}\right],(k\in \mathbf{Z})$

4.已知非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 满足 $\vec{b}$=(5,0),若 $\left(\vec{b}-\vec{a}\right)\perp\vec{b}$,则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影的数量为(　　)

A.5　　　　B.1

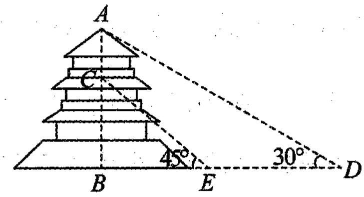
C.(5 ,0)　　　　D.(1,0)

5.已知 $a=\sqrt{\frac{1-\cos 66°}{2}}$, $b=\frac{1+\tan 19°}{1-\tan 19°}$, $c=2\cos^2 34°-1$,则下列选项正确的是 (　　)

A. $a>c>b$　　　　B. $c>a>b$

C. $a>b>c$　　　　D. $b>a>c$

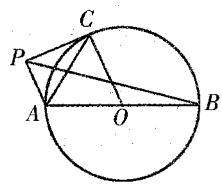
6.“欲穷千里目，更上一层楼”出自唐朝诗人王之涣的《登鹳雀楼》，鹳雀楼位于今山西永济市，该楼有三层，前对中条山，下临黄河，传说常有鹳雀在此停留，故有此名。与黄鹤楼、岳阳楼、滕王阁齐名，是中国古代四大名楼之一。下面是复建的鹳雀楼的示意图，某位游客(身高忽略不计)从地面 D 点看楼顶点 A 的仰角为30°，沿直线前进80米到达 E 点，此时看点 C 的仰角为 45°，若 $BC=3AC$，则楼高 AB 约为(　　)
($\sqrt{3}\approx 1.732$，结果保留2位小数)



A.80.56米　　B.81.46米

C.84.32米　　D.85.96米

7.如图，点 C 在以 AB 为直径的圆上，其中 $AB=10$，过 A 向点 C 处的切线作垂线，垂足为 P，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最大值是(　　)



A.9　　B.16

C.25　　D.36

8.已知 $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，且 $\cos\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$，则 $\tan\beta=$(　　)

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{39\sqrt{3}}{71}$或$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\dfrac{39\sqrt{3}}{71}$或 $\sqrt{3}$　　D. $\sqrt{3}$

二、多项选择题(本题共3小题，每小题6分，共18分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对得6分，部分选对得部分分，有选错得0分)

9.已知向量 $\vec{a}=(1,\sqrt{3})$，$\vec{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则下列结论正确的是(　　)

A.若 $\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$，则 $\tan\alpha=\sqrt{3}$　　B. $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 最大值为 $\sqrt{3}$

C.若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\tan\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D.若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=3$

10.在 $\triangle ABC$ 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，下列说法正确的是(　　)

A. 若 $A=45°$，$a=4\sqrt{3}$，$b=8$，则 $\triangle ABC$ 有两个解

B.若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}<0$，则 $\triangle ABC$ 是锐角三角形

C.若 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，则 $\sin A>\cos B$

D.若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，则 $B=\dfrac{\pi}{3}$

11.下列说法正确的有(　　)

A. $\tan 200°+\tan 40°+\sqrt{3}\tan(-160°)\tan 40°=-\sqrt{3}$

B.已知 $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)=\dfrac{2}{5}$，则 $\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\alpha\right)=-\dfrac{17}{25}$

C. $\sin 50°(1+\sqrt{3}\tan 10°)=1$

D.在 $\triangle ABC$，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $\tan A\tan B>1$，则 $\tan A\tan B\tan C>1$

三、填空题(本题共3小题,每小题5分,共15分)

12. 求值 $\cos945°+\sin300°=$________.

13. 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 满足 $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\left\langle\vec{a}-\vec{c},\vec{b}-\vec{c}\right\rangle=\frac{\pi}{3}$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值为________.

14. 已知函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$, $x=-\frac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点, $x=\frac{\pi}{8}$ 是函数 $f(x)$ 的一条对称轴,若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{5},\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调,则 ω 的最大值是________.

四、解答题(本题共5小题,共77分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

15.(13分)已知向量 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(m,\ 2)$, $\vec{c}=(-1,\ 2)$, 且 $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\perp\vec{c}$.

(1)求实数 m 的值;

(2)求 $|2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|$;

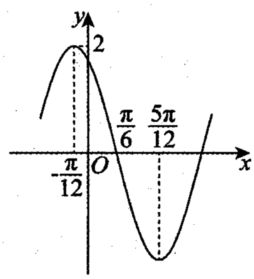
(3)求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 θ.

16.(15分)已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\ \omega>0,\ 0<\varphi<\pi)$ 的图象如图所示.

(1)求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2)求函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递增区间;

(3)求函数 $g(x)=f^2(x)-f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域.



17.(15分)已知$\triangle ABC$为锐角三角形,角A, B, C所对边分别为a, b, c, $\triangle ABC$满足:$\cos^2 B+\cos^2 C+\sin B\sin C\leqslant 1+\cos^2 A$

(1)求角A的取值范围;

(2)当角A取最大值时,若$AB=\sqrt{3}$,求$\triangle ABC$面积的取值范围.

18.(17分)已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-2\sin^2\omega x+1$, $\omega\neq 0$

(1)若$f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)$, $|x_1-x_2|_{\min}=\dfrac{\pi}{2}$,求函数$f(x)$的解析式及对称轴;

(2)若$\omega=1$,$f(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\alpha}{2})=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,且$\dfrac{5\pi}{6}<\alpha<\pi$,求$\sin\alpha$的值;

(3)已知$0<\omega<5$,函数$f(x)$的图像向右平移$\dfrac{\pi}{6}$个单位,再向上平移1个单位,得到函数$g(x)$的图像,$x=\dfrac{\pi}{3}$是$g(x)$一个零点,当$x\in[\dfrac{\pi}{9},\dfrac{17\pi}{36}]$时,方程$g(x)-a=0$恰有三个不相等的实数根$x_1$、$x_2$、$x_3$($x_1<x_2<x_3$),求实数$a$的取值范围以及$x_1+2x_2+x_3$的值.

19.(17分)“费马点”是由十七世纪法国数学家费马提出的一个几何问题.该问题是:“在一个三角形内求作一点,使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小”.意大利数学家托里拆利给出了解答:当$\triangle ABC$的三个内角均小于120°时,满足$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ$的点$O$即为费马点;当$\triangle ABC$有一个内角大于或等于$120^\circ$时,最大内角的顶点为费马点.利用以上知识解决下面问题:

(1)若$\triangle ABC$是边长为3的等边三角形,求该三角形的费马点O到各边的距离之和;

(2)$\triangle ABC$的内角A, B, C所对的边分别为a, b, c,且$b=a\sin B$,点P为$\triangle ABC$的费马点.

(i)若$bc=4\sqrt{3}$,求$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$;

(ii)求$\dfrac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}|^2}$的最大值.

2024—2025 学年度下学期期中考试高一数学参考答案

一、单选：1--5．CBDAD　　　　6--8. BCD

二、多选：9. AC　　10．ACD　　11．BCD

三、填空：12．$-\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$；　13．$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$；　14. 14

四．解答题

15.（13 分）

解：（1）由题意可知，$2\vec{a}-\vec{b}$=(4,6)-(m,2)=(4-m,4),

又$\vec{c}=(-1,2)$，$(2\vec{a}-\vec{b})\perp\vec{c}$可得$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}$=m-4+8=0，

解得 m=−4……………………………………………………………………………………4 分

（2）由（1）可知$\vec{b}=(-4,2)$，

可得 $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$=(4,6)+(−4,2)−(−1,2)=(1,6)，

因此$|2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}|=\sqrt{1^2+6^2}=\sqrt{37}$；……………………………………………8 分

（3）易知$\vec{a}\cdot\vec{b}$=2m+6=-8+6=-2

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=2\sqrt{5}$……………………………………………………………10 分

$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-2}{2\sqrt{5}\sqrt{13}}=-\frac{\sqrt{65}}{65}$

又$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle\in[0,\pi]$，可得$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\arccos(-\frac{\sqrt{65}}{65})=\pi-\arccos\frac{\sqrt{65}}{65}$……………………12 分

所以向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角

$\theta=\arccos(-\frac{\sqrt{65}}{65})$（或$\pi-\arccos\frac{\sqrt{65}}{65}$）…………………………………………13 分

16.（15 分）

解：（1）由图象知，$A=2$，

$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{4}$，$\omega>0$

所以$T=\pi=\frac{2\pi}{\omega}$，解得$\omega=2$，……………………………………………………3 分

所以$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

又$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，所以$-\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$

解得$\varphi=2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in Z$，由$0<\varphi<\pi$，k=0 可知$\varphi=\frac{2\pi}{3}$，所以$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$……5 分

（2）令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$，

解得 $k\pi-\frac{7\pi}{12}\le x\le k\pi-\frac{\pi}{12}$，$k\in Z$

所以函数的单调递增区间为$[k\pi-\frac{7\pi}{12},k\pi-\frac{\pi}{12}]$, $k\in Z$ ....8 分

又 $0\le x\le 2\pi$

当 k=1,单调递增区间为$[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}]$;当 k=2 单调递增区间为$[\frac{17\pi}{12},\frac{23\pi}{12}]$

所以函数 $f(x)$ 在$[0,2\pi]$上的单调递增区间$[\frac{5\pi}{12},\frac{11\pi}{12}]$,$[\frac{17\pi}{12},\frac{23\pi}{12}]$..10 分

（3）当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$时，$\frac{\pi}{3}\le 2x+\frac{2\pi}{3}\le\pi$，

所以 $0\le\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\le 1$，

令 t= $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\in[0,2]$...12 分

则 $g(x)=f^2(x)-f(x)=t^2-t=(t-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$,$t\in[0,2]$

当 $t=\frac{1}{2}$时，$g(x)_{min}=-\frac{1}{4}$;当 t=2 时，$g(x)_{max}=2$ 故函数 $g(x)$在$[0,2]$上的值域为$[-\frac{1}{4},2]$..........15 分

（注：没写 $k\in Z$ 扣 2 分）

17.（15 分）

解：（1）由题意知

$\cos^2B+\cos^2C+\sin B\sin C\le 1+\sin^2A$ 得 $\sin^2A\leqslant\sin^2B+\sin^2C-\sin B\sin C$ . . . . 2 分

由正弦定理可得：$a^2\leqslant b^2+c^2-bc$，即 $b^2+c^2-a^2\ge bc$，

$\therefore\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\ge\frac{1}{2}$， . . . . , , , , ... 5 分

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 A 的取值范围为$\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$； . . . . 6 分

（2）由（1）知：$A=\frac{\pi}{3}$；

法一、由正弦定理 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$ 得：$\frac{BC}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}$，

所以 $AC=\frac{\sqrt{3}\sin B}{\sin C}$，

$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}\frac{\sin B}{\sin C}\times\sin A=\frac{3}{2}\times\frac{\sin B}{\sin C}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{\sin B}{\sin C}$

. . . . 7 分

又 A+B+C= π，$A=\frac{\pi}{3}$ 则 $B=\frac{2\pi}{3}-C$

$S=\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{\sin B}{\sin C}=\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}-c)}{\sin C}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{3\sqrt{3}}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\tan C}+\frac{1}{2})$

…………………………………………………………8 分

因为ΔABC 为锐角三角形 B=$\frac{2\pi}{3}$−C，$\therefore\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2}\\0<C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，即$\begin{cases}0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2}\\0<C<\frac{\pi}{2}\end{cases}$，解得：$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$..10 分

则$\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\tan C}+\frac{1}{2}<2$

…………………………………………………………12 分

所以$\frac{3\sqrt{3}}{8}<\frac{3\sqrt{3}}{4}(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\tan C}+\frac{1}{2})<\frac{3\sqrt{3}}{2}$

即面积的取值范围为（$\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{3\sqrt{3}}{2}$）…………………………15 分

法二、求 b 的范围

S=$\frac{1}{2}$bcsinA=$\frac{1}{2}$b$\sqrt{3}$sin$\frac{\pi}{3}$=$\frac{3}{4}$b,$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{3}$=$b^2+3-\sqrt{3}$b……………………9 分

因为ΔABC 为锐角三角形

所以$\begin{cases}b^2<a^2+c^2\\c^2<a^2+b^2\end{cases}$ 即$\begin{cases}b^2<b^2+3-\sqrt{3}b+3\\3<b^2+3-\sqrt{3}b+b^2\end{cases}$……………………12 分

解得$\frac{\sqrt{3}}{2}$<b<2$\sqrt{3}$，$\frac{3\sqrt{3}}{8}$<S=$\frac{3}{4}$b<$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

即面积的取值范围为（$\frac{3\sqrt{3}}{8},\frac{3\sqrt{3}}{2}$）…………………………15 分

18.（17 分）

（1）函数

$f(x)=2\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-2\sin^2\omega x+1=\sqrt{3}\sin2\omega x-2\sin^2\omega x+1=\sqrt{3}\sin2\omega x+\cos2\omega x$

$=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6})$，$\omega\neq0$.

则$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{|2\omega|}$，

因为$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，所以函数$f(x)$的最小正周期$T=\pi$，

所以$T=\frac{2\pi}{|2\omega|}=\pi$，解得$\omega=\pm1$……………………………1 分

①当$\omega=1$时，$f(x)=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，令$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in Z$），解得$x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$（$k\in Z$），

所以函数 $f(x)$ 的图像的对称轴为 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$（$k\in Z$）. . . . . 3 分

②当 $\omega=-1$ 时，$f(x)=2\sin(-2x+\frac{\pi}{6})$，令 $-2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in Z$），

解得 $x=-\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2}$（$k\in Z$），

所以函数 $f(x)$ 的图像的对称轴为 $x=-\frac{\pi}{6}-\frac{k\pi}{2}$（$k\in Z$）；. . . . . 5 分

（**法二**：当 $\omega=-1$ 时，$f(x)=-2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，令 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}+k\pi$（$k\in Z$），

解得 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$（$k\in Z$），

所以函数 $f(x)$ 的图像的对称轴为 $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$（$k\in Z$）. . . . . 5 分

（2）当 ω =1，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

由 $f\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\alpha}{2}\right)=2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由 $\frac{5\pi}{6}<\alpha<\pi$，则 $\frac{7\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{3}<\frac{4\pi}{3}$，可得 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$，.....7 分

所以

$$\sin\alpha=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$$

....10 分

（3）由题意可知

$g(x)=2\sin(2\omega x+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega)+1$，. . . . . 11 分

因为 $x=\frac{\pi}{3}$ 是 $g(x)$ 的一个零点，即 $g(\frac{\pi}{3})=2\sin(\frac{2\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\omega)+1=0$，

所以 $\sin(\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}+2k_1\pi$（$k_1\in Z$）或 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}+2k_2\pi$（$k_2\in Z$），

故 $\omega=3+6k_1$（$k_1\in Z$）或 $\omega=5+6k_2$（$k_2\in Z$），

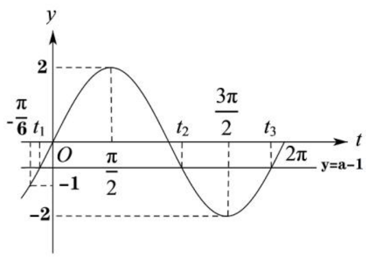
又 $0<\omega<5$，$\omega=5+6k_2$（$k_2\in Z$）（舍），故 $\omega=3$

$g(x)=2\sin(6x-\frac{5\pi}{6})+1$，..13 分

当$\frac{\pi}{9}\le x\le\frac{17\pi}{36}$时，$-\frac{\pi}{6}\le 6x-\frac{5\pi}{6}\le 2\pi$，设$t=6x-\frac{5\pi}{6}$，则$t\in[-\frac{\pi}{6},2\pi]$，

则原式可化为$h(t)=2\sin t+1$，即$y=h(t)-1=2\sin t$的图像在区间$[-\frac{\pi}{6},2\pi]$内与水平直线

$y=a-1$的图像有3个不同的交点，



作出$y=2\sin t$在$[-\frac{\pi}{6},2\pi]$上的图像如下图所示，

所以当$-1\le a-1\le 0$时，即$0\le a\le 1$

$y=2\sin t$与$y=a-1$恰有3个不同的交点，

故实数a的取值范围为$[0,1]$..15 分

设$y=2\sin t$与$y=a-1$的3个不同的交点分别为t_1、t_2、t_3（$t_1<t_2<t_3$），

则$t_1+t_2=\pi$、$t_2+t_3=3\pi$，$\therefore t_1+2t_2+t_3=4\pi$，即

$(6x_1-\frac{5\pi}{6})+2\times(6x_2-\frac{5\pi}{6})+(6x_3-\frac{5\pi}{6})=4\pi$，

整理得$x_1+2x_2+x_3=\frac{11\pi}{9}$..17 分

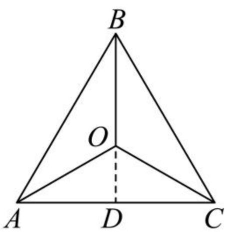
（注：没写$k\in Z$扣 2 分）

19.（17 分）

解：（1）因为$\triangle ABC$为等边三角形，三个内角均小于120°，

故费马点O在三角形内，满足$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=120^\circ$，且$OB=OC=OA$，

如图：



过O作$OD\perp AC$于D，则 $CD=\frac{3}{2}$,$\angle OCD=30°$，故 $OD=CD\tan 30°=\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为$\triangle ABC$为等边三角形，费马点O到各边的距离相等

所以该三角形的费马点O到各边的距离之和为 $3OD=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ....5 分

（2）（i）因为 b=asinB，由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，且 sinB≠ 0，

所以$\frac{a}{\sin A}=\frac{a\sin B}{\sin B}$,sinA=1,0°<A<180°得 A=90°，

所以$\triangle ABC$的三个角都小于$120°$，

则由费马点定义可知，$\angle APB=\angle BPC=\angle APC=120°$，

设$|\overrightarrow{PA}|=x,|\overrightarrow{PB}|=y,|\overrightarrow{PC}|=z$， $x>0,y>0,z>0$，bc=$4\sqrt{3}$

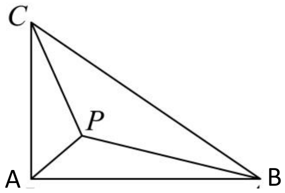
由$S_{\triangle APB}+S_{\triangle BPC}+S_{\triangle APC}=S_{\triangle ABC}$得：$\frac{1}{2}xysin120^{\circ}+\frac{1}{2}yzsin120^{\circ}+\frac{1}{2}xzsin120^{\circ}=\frac{1}{2}$bc=$2\sqrt{3}$

整理得 $xy+yz+xz$=8..8 分

又$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$=（$-\frac{1}{2}$）$xy$+（$-\frac{1}{2}$）$yz$+（$-\frac{1}{2}$）xz=−4.

故$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$=−4...10 分

（ii）由（i）知 A=90°，所以点P在$\triangle ABC$内部，且$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$，



设设$|\overrightarrow{PA}|=x,|\overrightarrow{PB}|=y,|\overrightarrow{PC}|=z$， $x>0,y>0,z>0$，

令 $y=mx,z=nx,m>0,n>0$ 所以$\frac{|\mathrm{PB}|\cdot|\mathrm{PC}|}{|\mathrm{PA}|^2}=\frac{mx\cdot nx}{x^2}$=mn..12 分

由余弦定理得，$|\overrightarrow{AB}|^2=x^2+m^2x^2-2mx^2\cos120^{\circ}=(m^2+m+1)x^2$ ，

$|\overrightarrow{AC}|^2=x^2+n^2x^2-2nx^2\cos120^{\circ}=(n^2+n+1)x^2$

$|\overrightarrow{BC}|^2=m^2x^2+n^2x^2-2mnx^2\cos120^{\circ}=(m^2+n^2+mn)x^2$

由勾股定理得，$|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2$，即$\left(n^2+n+1\right)x^2+\left(m^2+m+1\right)x^2=\left(m^2+n^2+mn\right)x^2$，

所以$\left(m^2+n^2+m+n+2\right)x^2=\left(m^2+n^2+mn\right)x^2$，即$m+n+2=mn$，而

$m>0,n>0,m+n+2=mn,mn-2=m+n\geq 2\sqrt{mn}$，

当且仅当$m=n$，即$m=n=1+\sqrt{3}$时，等号成立．...14 分

设$t=\sqrt{mn}>0$，则$t^2-2t-2\geq 0$，解得$t\geq 1+\sqrt{3}$或$t\leq 1-\sqrt{3}$（舍去），

由$t=\sqrt{mn}\geq 1+\sqrt{3},mn\geq(1+\sqrt{3})^2=4+2\sqrt{3}$，

所以$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2}$=mn$\geq 4+2\sqrt{3}$

又$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|\cdot\cos120^{\circ}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2}=-\frac{1}{2}mn\leq -2-\sqrt{3}$

故$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2}$的最大值为$-2-\sqrt{3}$,此时$m=n=1+\sqrt{3}$，即$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$=（$1+\sqrt{3}$）$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$

....17 分