绝密★启用前

2025年普通高等学校招生全国统一考试

数 学

类 型：新课标 I 卷

命 制：教育部教育考试院

适 用：浙江、山东、江苏、河北、福建、湖北、湖南、广东、江西、安徽、河南

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中只有一个选项是符合题目要求的。

1 $(1+5i)i$ 的虚部为 (C)

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 6

解：$(1+5i)i = i+5i^2=i-5$

2 设全集 $U=\{x\mid x<9,x\in \mathbf{Z}_+\}$，集合 $A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素个数为 (C)

A. 0　　B. 3　　C. 5　　D. 8

解：$C_U A=\{2,4,6,7,8\}$，共有 5 个元素，故选 C

3 若双曲线 C 的虚轴长为实轴长的 $\sqrt{7}$ 倍，则 C 的离心率为 (D)

A. $\sqrt{2}$　　B. 2　　C. $\sqrt{7}$　　D. $2\sqrt{2}$

解：$\because b=\sqrt{7}a$，$\therefore e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，故选 D

4 若点 $(a,0)(a>0)$ 是函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心，则 a 的最小值为 (B)

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{4\pi}{3}$

解：函数 $y=2\tan\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 图像的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},0\right),k\in Z$

又 $\because a>0$，$\therefore a$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$，故选 B

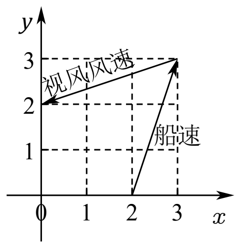
5 设 $f(x)$ 是定义在 R 上且周期为 2 的偶函数，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=5-2x$，则 $f\left(-\frac{3}{4}\right)=$ (A)

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $-\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{2}$

解：$\because f(-x)=f(x),f(x+2)=f(x),f\left(-\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}+2\right)=f\left(\frac{11}{4}\right)=5-2\times\frac{11}{4}=-\frac{1}{2}$，选 A

6 帆船比赛中，运动员可借助风力计测定风速的大小和方向，测出的结果在航海学中称为视风风速，视风风速对应的向量，是真风风速对应的向量与船行风速对应的向量之和．其中行船风速对应的向量与船速对应的向量大小相等，方向相反，表中给出了部分风力等级、风速大小与名称的对应关系，已知某帆船运动员在某时刻测得的视风风速对应的向量与船速对应的向量如图（风速的大小和向量的大小相同，单位 m/s），则其风速等级是

级别	名称	风速
2	轻风	1.6~3.3
3	微风	3.4~5.4
4	和风	5.5~7.9
5	劲风	8.0~10.7



A. 轻风　　B. 微风　　C. 和风　　D. 劲风

解：视风风速 $\vec{a}=(0,2)-(3,3)=(-3,-1)$ ，船速 $\vec{b}=(3,3)-(2,0)=(1,3)$

$\therefore$ 真风风速 $\vec{n}=\vec{b}+\vec{a}=(-3,-1)+(1,3)=(-2,2)$ ，真风速大小 $\left|\vec{n}\right|=2\sqrt{2}\approx 2.828$

7 若圆 $x^2+(y+2)^2=r^2(r>0)$ 上到直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 距离为1的点有且仅有 2 个，则 r 的取值范围是（ B ）

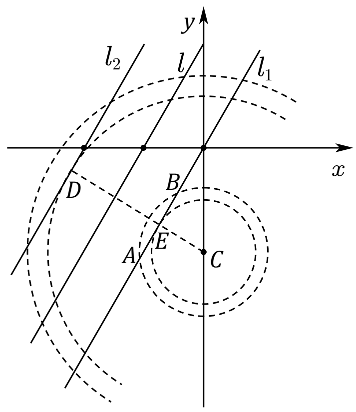
A. $(0,1)$　　B. $(1,3)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

解：设与直线 $y=\sqrt{3}x+2$ 平行的直线为 $y=\sqrt{3}x+m$，让两条直线之间的距离为1，则有：

$$\frac{|m-2|}{\sqrt{3+1}}=1$$

$\Longrightarrow m=0$, 或 $m=4$

即两条平行直线为 l_1: $y=\sqrt{3}x$，l_2: $y=\sqrt{3}x+4$



如图，设圆心为 C，当圆与 l_1 相交时，圆上只有两交点 A，B 到直线 l 的距离为1

当圆与 l_2 相交时，圆上有4个点到直线 l 的距离为1。

由此可知临界为相切 D，E 时取到。

设圆心 C 到 l_1 距离为 d_1，圆心 C 到 l_2 距离为 d_2，

$d_1=\dfrac{|2|}{\sqrt{3+1}}=1, d_2=\dfrac{|2+4|}{\sqrt{3+1}}=3$

$\therefore r\in(1,3)$

故选 B

8 若实数 x,y,z 满足 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$，则 x,y,z 的大小关系不可能是（ B ）

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$　　C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

解：$2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=k$,

则 $\log_2 x=k-2, x=2^{k-2}$，$\log_3 y=k-3$，$y=3^{k-3}\log_5 z=k-5$，$z=5^{k-5}$ ，

当 $k=8$ 时，$y>z>x, D$ 正确

当 $k=0$ 时，$x=\dfrac{1}{4}, y=\dfrac{1}{27}, z=\dfrac{1}{5^5}, x>y>z, A$ 正确

当 $k=5$ 时，$x=2^3=8, y=3^2=9, z=1, y>x>z, C$ 正确

设 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z=t$

$\therefore x=2^{t-2}, y=3^{t-3}, z=5^{t-5}$

二、选择题：本题共3小题，每小题6分，共18分。全部选对得6分，选不全得3分，多选或选错一个得0分。

9 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为 BC 中点，则 （ BC ）

A. $AD\perp A_1C$　　B. $BC\perp$ 平面 AA_1D　　C. $CC_1//$ 平面 AA_1D　　D. $AD//A_1B_1$

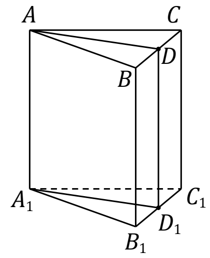
解：设 D_1 为 B_1C_1 的中点

①由题得 $AD\perp AA_1$，若 $AD\perp A_1C$，则 $AD\perp$ 平面 AA_1C，则 $AD\perp AC$，矛盾！ A 错误；

②由题得 $AD\perp BC$， $AA_1\perp BC$ ，则 $BC\perp$ 平面 AA_1D ，故 B 正确；

③由题得 $AD//A_1D_1$，若 $AD//A_1B_1$ ，则 $A_1D_1//A_1B_1$ ，矛盾！ 故 D 不正确；

④由题得 $CC_1//AA_1$，又 CC_1 不在面 AA_1D 上，故 $CC_1//$ 平面 AA_1D ，故 C 正确；



10 设抛物线 $C:y^2=6x$ 的焦点为 F，过 F 的直线交 C 于 A、B，过 F 且垂直于 AB 的直线交 $l:x=-\frac{3}{2}$ 于 E，过 A 作 l 的垂线，垂足为 D，则 （ ACD ）

A. $|AD|=|AF|$　　B. $|AE|=|AB|$　　C. $|AB|\geqslant 6$　　D. $|AE|\cdot|BE|\geqslant 18$

解：A：由抛物线的定义知：$AD=AF$，A 对.

B: 考虑特殊情况，即通径时，取 $A\left(\frac{3}{2},3\right)$，$B\left(\frac{3}{2},-3\right)$，此时，$E\left(-\frac{3}{2},0\right)$

此时有 $AB=6,EF=3$，此时 $EF\neq AB$ ，∴ B 错.

C: ∵ 抛物线焦点弦性质可知：$AB\geqslant 2p$（通径）$=6$，C 对.

D: 设 $AB:x=my+\frac{3}{2}$，则 $EF:x=-\frac{1}{m}y+\frac{3}{2}$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),E\left(-\frac{3}{2},3m\right)$

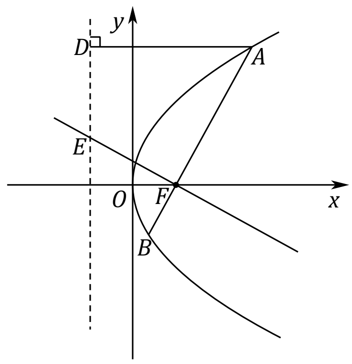
联立 $\begin{cases}x=my+\frac{3}{2}\\ y^2=6x\end{cases}\implies y^2-6my-9=0$

$y_1+y_2=6m,y_1y_2=-9,x_1+x_2=m(y_1+y_2)+3=6m^2+3$ ，

当 $m=0$ 时，$AE=BE=3\sqrt{2}$，$AE\cdot BE=18$

当 $m\neq 0$ 时， $EF=\sqrt{9+9m^2}$， $S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}AE\cdot BE\sin\angle AEB=\frac{1}{2}AB\cdot EF=\frac{1}{2}(6m^2+6)\sqrt{9+9m^2}>9$

∴ $AE\cdot BE>\frac{18}{\sin\angle AEB}>18$，综上 $AE\cdot BE\geqslant 18$， D 对.



11 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$ ，若 $\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2,\cos A\cos B\sin C=\frac{1}{4}$ ，则 （ ABC ）

A. $\sin C=\sin^2A+\sin^2B$　B. $AB=\sqrt{2}$　　C. $\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $AC^2+BC^2=3$

解： $\cos 2A+\cos 2B+2\sin C=2\Rightarrow 2\sin C=1-\cos 2A+1-\cos 2B\Rightarrow 2\sin C=2\sin^2A+2\sin^2B$ ，

∴ $\sin C=\sin^2A+\sin^2B$ ，故 A 正确

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R,a^2+b^2=c\cdot 2R\geqslant c^2$ ，若 $a^2+b^2>c^2$ ，即 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，

则 $A+B>\frac{\pi}{2}\Rightarrow A>\frac{\pi}{2}-B$ ，则 $\sin A>\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$ ，即 $\sin A>\cos B$ ，代 $\lambda\sin C=\sin^2A+\sin^2B$ ，

有 $\sin C=\sin^2A+\sin^2B>\cos^2B+\sin^2B=1$ ，矛盾，故 $a^2+b^2=c^2$ ，

即 $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B=0\Rightarrow\cos A\cos B=\sin A\sin B=\frac{1}{4}$ ，

∵ $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{4}\Rightarrow ab=\frac{1}{2}$，

∴ $\frac{ab}{\sin A\sin B}=(2R)^2=2\Rightarrow 2R=\sqrt{2},\frac{c}{\sin C}=2R=\sqrt{2}\Rightarrow c=\sqrt{2}$ ，故 B 正确；

$(\sin A+\sin B)^2=\sin^2A\sin^2B+2\sin A\sin B=\sin C+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\sin A+\sin B=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ，故 C 正确；

$|AC|^2+|BC|^2=|AB|^2=c^2=2$ ，故 D 错误. 故选择：ABC

三、填空题：本题共3小题，每小题5分，共15分。

12 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的切线，则 $a=$ __4__.

解： $y'=e^x+1$ 令 $y'=e^x+1=2\Rightarrow x=0$

代入 $y=2x+5\Rightarrow$ 切点为 $(0,5)$

再将 $(0,5)$ 代入 $y=e^x+x+a\Rightarrow a=4$

13 若一个等比数列的前 4 项和为 4，前 8 项和为 68，则该等比数列的公比为__±2__.

解： $S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=4$

$S_8=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$

$=a_1+a_2+a_3+a_4+q^4(a_1+a_2+a_3+a_4)$

$=(1+q^4)(a_1+a_2+a_3+a_4)=4(1+q^4)=68$

$\Rightarrow 1+q^4=17\Rightarrow q^4=16\Rightarrow q=\pm2$

14 一个箱子里有 5 个球，分别以 1 ~5 标号，若有放回取三次，记至少取出一次的球的个数 X，

则 $E(X)=$ __$\frac{61}{25}$__.

解： X 可取 1,2,3

$$P(X=1)=\frac{5}{5^3}=\frac{1}{25},\ P(X=2)=\frac{C_5^2C_2^1C_3^1}{5^3}=\frac{12}{25},\ P(X=3)=\frac{5\times4\times3}{53}=\frac{12}{75}$$

X	1	2	3
P	$\frac{1}{75}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{12}{25}$

$$\therefore\ E(X)=1\times\frac{1}{25}+2\times\frac{12}{25}+3\times\frac{12}{25}=\frac{61}{25}$$

四、解答题：本题共5小题，共77分。应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15 (本小题 13 分)

调查 1000 人是否患某疾病与超声波检测结果的 2×2 到联表如下:

检测结果 是否患病	正常	不正常	合计
患病	20	180	200
不患病	780	20	800
合计	800	200	1000

(1) 若检测结果不正常者患病的概率为 p，求 p 的估计值；

(2) 能否根据小概率 $\alpha=0.001$ 的 χ^2 独立性检验认为样本数据中超声波检测结果是否患该疾病有关?

附: $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,

$P(\chi^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

解： (1) 超声波检查结果不正常患者有 200 人，患病有 180 人，$\therefore\ p=\frac{180}{1200}=0.9$

(2) $\chi^2=\dfrac{1000(20\times20-180\times780)^2}{800\times200\times200\times800}=\dfrac{(400-140400)^2}{8\times20\times200\times800}=\dfrac{140000\times140000}{8\times20\times200\times800}$

$=\dfrac{14000\times14}{8\times2\times2\times8}>10.828=\chi_{0.001}$

$\therefore$说认为样本数据中超声波检测结果是患该疾病有关.

16 (本小题 15 分)

设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n(n+1)}$.

(1) 证明: $\{na_n\}$ 为等差数列;

(2) 设 $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$, 求 $f'(2)$.

解: (1) $\because \dfrac{a_{n+1}}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, $\therefore$ $\dfrac{a_{n+1}}{n}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{a_n}{n+1}-\dfrac{1}{n+1}$

$\dfrac{a_{n+1}-1}{n}=\dfrac{a_n-1}{n+1} \implies (n+1)a_{n+1}-(n+1)=na_n-n$, $\therefore$ $(n+1)a_{n+1}-na_n=1, 1\times a_1=3$

$\therefore$ $\{na_n\}$ 以 3 为首项, 1 为公差的等差数列. $\therefore$ $na_n=3+(n-1)\times 1=n+2$

(2)$f(x)=a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\cdots+a_mx^m$, $f'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\cdots+ma_mx^{m-1}$

$xf'(x)=a_1x+2a_2x^2+3a_3x^3+4a_4x^4+\cdots+ma_mx^m$

$(1-x)f'(x)=a_1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots+x^{m-1}-ma_mx^m$, $(1-x)f'(x)=a_1+\dfrac{x(1-x^{m-1})}{1-x}-ma_m\cdot x^m$

令 $x=-2$. $(-2)=3+\dfrac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{3}-(m+2)\cdot(-2)^m$

$f'(-2)=1+\dfrac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{9}-\dfrac{(m+2)}{3}\cdot(-2)^m=\dfrac{7}{9}-\dfrac{(-2)^m}{9}-\dfrac{(m+2)}{3}\cdot(-2)^m$

$=\dfrac{7}{9}-\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{m+2}{3}\right)\cdot(-2)^m$.

17 (本小题 15 分)

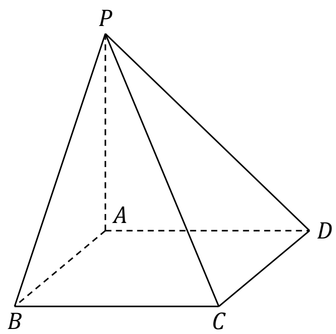
如图所示的四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA\perp$ 平面 $ABCD, BC\,/\!/\,AD, AB\perp AD$.

(1) 证明: 平面 $PAB\perp$ 平面 PAD ;

(2) 若 $PA=AB=\sqrt{2}, AD=\sqrt{3}+1, BC=2, P,B,C,D$ 在同一个球面上, 设该球面的球心为 O .

(i) 证明: O 在平面 $ABCD$ 上;

(ii) 求直线 AC 与直线 PO 所成角的余弦值.



解: (1) $\because PA\perp$ 面 $ABCD$ $AB\subset$ 面 $ABCD$ $\therefore$ $AB\perp PA$

又 $\because AB\perp AD$ 且 $PA\cap AD=A$ $\therefore$ $AB\perp$ 面 PAD

又 $\because AB\subset$ 面 PAB $\therefore$面 $PAB\perp$ 面 PAD

取 PB 中点 M, PC 中点 N, $AH=1$

(2) (i) $\because PA\perp$ 面 $ABCD$ $BC\subset$ 面 $ABCD$ $\therefore$ $BC\perp PA$

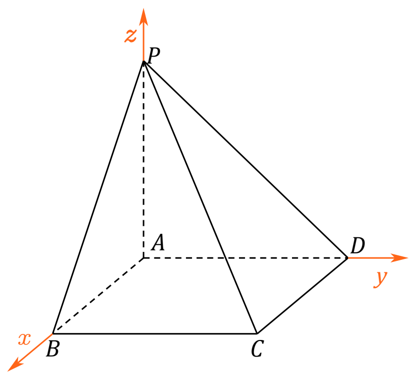
$BC\perp AD$ $PA\cap AD=A$ $\therefore$ $BC\perp PB$.

$\therefore$ $\triangle PBC$ 截面圆的圆心为 PC 中点 N $\therefore$ $PA=AB=\sqrt{2}$

又 $\because AM\perp PB, AM\perp BC, PB\cap BC=B$. $\therefore$ $AM\perp$ 面 PBC

四边形 $AHNM$ 为平行四边形$\therefore$ $HN\perp$ 面 PBC , 球心在直线 NH 上

又 $\because HB=HC=HD=\sqrt{3}$. $\therefore$ H 即为球心 O .



法二：设 $\triangle BCD$ 外接圆圆心为 O_1 , 易知 BC 中垂线为 $y=1$;BD 中垂线为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}x+1$, 联立解得 $O_1(0,1,0)$, 由于 $PO_1=\sqrt{3}, BO_1=\sqrt{3}$, $\therefore$ $PO_1=BO_1$, 此时 O 与 O_1 重合, 故 O 在平面 $ABCD$ 上.

(ii) 由 (1),(2) 知, 建立如图所示坐标系 $A-xyz$,

$A(0,0,0), C(\sqrt{2},2,0), P(0,0,\sqrt{2}), O(0,1,0)$

$\overrightarrow{AC}=(\sqrt{2},2,0)$, $\overrightarrow{PO}=(0,1,-\sqrt{2})$

$\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{PO}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{PO}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{PO}|}=\dfrac{2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

$\therefore$ AC 与 PO 的夹角余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

18 (本小题 17 分)

设椭圆 C: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，记 A 为椭圆下端点, B 为右端点, $|AB|=\sqrt{10}$，且椭圆 C 的离心率为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$．

(1) 求椭圆的标准方程:

(2) 设点 $P(m,n)$. R 是射线 AP 上一点.

(i) 若 P 不在 y 轴上, $|AR|\cdot|AP|=3$，用 m,n 表示点 R 的坐标;

(ii) 设 O 为坐标原点, Q 是 C 上的动点, 直线 OR 的斜率是直线 OP 的斜率的 3 倍, 求 $|PQ|$ 的最大值.

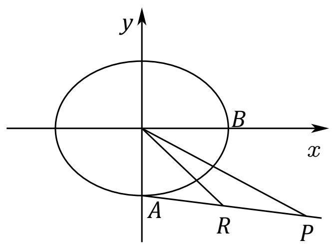
解: (1) $\dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ ．$|AB|=a^2+b^2=10$, $\begin{cases}a^2=b^2+c^2\\ \dfrac{c}{a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\end{cases}$

$\therefore\ a=3,b=1,c=2\sqrt{2}$ ．$\therefore\ C$ 的方程: $\dfrac{x^2}{9}+y^2=1$ ．

(2) (i) 由题可知直线 AP 斜率存在, 设其为 k，则直线 AP 的方向向量为 $(1,\ k)$,

故可设 $\overrightarrow{AP}=\lambda_1(1,k),\overrightarrow{AR}=\lambda_2(1,k)$ ，

$\because$ 点 R 在射线 AP 上, 故 $\lambda_1\lambda_2>0$ ，$\therefore\ \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AR}=\lambda_1\lambda_2(1+k^2)=3$,



$\overrightarrow{AP}=(m,n+1),\overrightarrow{AR}=(x_R,y_R+1)$ ，

$$\begin{cases}m=\lambda_1\\ n+1=\lambda_1 k\\ x_R=\lambda_2\\ y_R+1=\lambda_2 k\\ \lambda_1\lambda_2(1+k^2)=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=m\\ k=\dfrac{n+1}{m}\\ \lambda_2=\dfrac{3}{\lambda_1(1+k^2)}\end{cases}$$

$$x_R=\lambda_2=\frac{3}{\lambda_1(1+k^2)}=\frac{3}{m\left[1+\left(\frac{m+1}{m}\right)^2\right]}=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}=\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}$$

$$y_R=k\lambda_2=\frac{n+1}{m}\times\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}-1=\frac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$$

$\therefore\ R$ 的坐标为 $\left(\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1\right)$ ．

法二: $|AP|\cdot|AR|=3$，令 $\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AP},t>0$ ．

$|AP|\cdot|AR|=t|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AP}|=3$，$\therefore\ t[m^2+(n+1)^2]=3$，$\therefore\ t=\dfrac{3}{m^2+(n+1)^2}$，设 $R(x,y),\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AP}$

$(x,y+1)=\dfrac{3}{m^2+(n+1)^2}(m,n+1)$，$\therefore\ x=\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},y=\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1$

$\therefore R\left(\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2},\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1\right)$

$$(ii)k_{OR}=\frac{\dfrac{3(n+1)}{m^2+(n+1)^2}-1}{\dfrac{3m}{m^2+(n+1)^2}}=\frac{3(n+1)-m^2-(n+1)^2}{3m},\ k_{OP}=\frac{n}{m}$$

$\therefore\ \dfrac{3n}{m}=\dfrac{3(n+1)-m^2-(n+1)^2}{3m}\Longrightarrow 9n=3n+3-m^2-n^2-2n-1\Longrightarrow m^2+n^2+8n-2=0$

$\Longrightarrow m^2+(n+4)^2=18\Longrightarrow P$ 在以 $(0,\ -4)$ 为圆心, $3\sqrt{2}$ 半径的圆上.

$|PQ|_{\max}=P$ 到圆心 $(0,\ -4)$ 的距离 $d\ +$ 半径 r

设 $Q(3\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi]$ ，

$\therefore d=\sqrt{(3\cos\theta)^2+(\sin\theta+4)^2}=\sqrt{9\cos^2\theta+\sin^2\theta+8\sin\theta+16}=\sqrt{-8\sin^2\theta+8\sin\theta+25}$

令 $t=\sin\theta$ $\therefore$ $t\in[-1,1]$, $y=-8t^2+8t+25$, 当 $t_0=\dfrac{8}{16}=\dfrac{1}{2}$ 时, $|PM|_{\max}=\sqrt{27}+3\sqrt{2}=3\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

19 (本小题 17 分)

设函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$.

(1) 求 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值;

(2) 给定 $\theta\in(0,\pi),a$ 为给定实数, 证明: 存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$, 使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$;

(3) 若存在 φ , 使得对任意 x , 都有 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$, 求 b 的最小值.

解: (1) $f'(x)=5(\sin 5x-\sin x)=5[\sin(3x+2x)-\sin(3x-2x)]=10\cos 3x\cdot\sin 2x$,

令 $f'(x)=0$, $\because$ $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, 解得 $x=0$ 或 $\frac{\pi}{6}$.

结合单调性可知, 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时, $f'(x)>0,f(x)$ 单调递增; 当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $f'(x)<0$,

$f(x)$ 单调递减. 故 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$.

(2) 证明: 不妨设 $a\in[0,2\pi)$, 令 $g(y)=\cos y-\cos\theta$, 则 $g(a)=\cos a-\cos\theta$.

只需证明: $g(y)\leqslant 0$.

而 $g(a-\theta)=-2\sin\frac{\theta}{2}\sin\left(\frac{\theta}{2}-a\right)=2\sin\left(a-\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}$,

$g(a+\theta)=-2\sin\left(a+\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}$,

(i) 若 $a-\theta<\theta<a+\theta$, 则 $a<2\theta$.

令 $y=\theta\in[a-\theta,a+\theta]$, 则 $\cos y\geqslant\cos\theta$;

(ii) 若 $\theta\leqslant a-\theta,a\geqslant 2\theta$, 令 $y=a-\theta$, 则 $y\in(0,\pi)$ 且 $y\in[a-\theta,a+\theta],\cos y\geqslant\cos\theta$.

由周期性, $\forall\, a\in[2k\pi,(2k+1)\pi)(k\in Z)$, 上述结论都成立.

综上, 存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$, 使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$.

(3) 令 $h(x)=5\cos x-\cos(5x+\varphi),h'(x)=-5\sin x+5\sin(5x+\varphi)$,

由于 $h(x)$ 周期为 2π , 不妨设 $x\in[-\pi,\pi],\varphi\in[-\pi,\pi]$,

因为 $h(x)$ 连续且处处可导, 所以 $h(x)$ 最大值在极值点处取到,

令 $h'(x)=0,\sin(5x+\varphi)=\sin x$, 所以 $5x+\varphi=x+2k_1\pi$ 或 $5x+\varphi=\pi-x+2k_2\pi$,

所以 $x=-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1\pi}{2}$ 或 $x=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2\pi}{3}(k_1,k_2\in Z)$,

当 $x=-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1\pi}{2}$ 时, $h(x)=5\cos x-\cos x=4\cos x=4\cos\left(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi\right)$,

当 $x=\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2\pi}{3},h(x)=5\cos x-\cos(\pi-x+2k_2\pi)=6\cos x=6\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi\right)$,

所以 $h(x)_{\max}=\max\left\{4\cos\left(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi\right),6\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi\right)\right\}$,

显然 $4\cos\left(-\frac{\varphi}{4}+\frac{k_1}{2}\pi\right)\leqslant 4$, 记 $q(\varphi)=6\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}+\frac{k_2}{3}\pi\right)$,

取值情况最多有 6 种, 相当于 $p(x)=6\cos x$ 图象上以 $A\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6},p\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\varphi}{6}\right)\right)$ 为起点, 横坐标以 $\frac{\pi}{3}$ 为跨度, 往后总共取 6 个点, 由 $p(x)$ 图象可知, $\varphi=0$ 时, $q(\varphi)$ 取最小值 $3\sqrt{3},3\sqrt{3}>4$,

所以 $b\geqslant 5\cos x-\cos(5x+\varphi)$, 所以 $b\geqslant q(\varphi)_{\min}=3\sqrt{3}$,

此时 $h(x)\leqslant 3\sqrt{3}$ 恒成立, 且 $x=\pm\frac{\pi}{6}$ 时取等号, 所以 b 的最小值为 $3\sqrt{3}$.